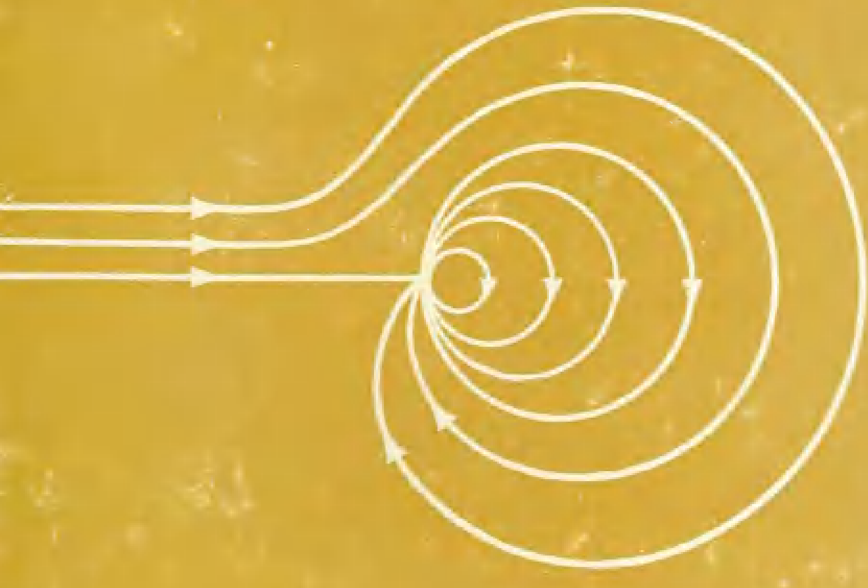
В.И. ОПОЙЦЕВ

# РАВНОВЕСИЕ И УСТОЙЧИВОСТЬ В МОДЕЛЯХ КОЛЛЕКТИВНОГО ПОВЕДЕНИЯ



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

МИНИСТЕРСТВО ПРИБОРОСТРОЕНИЯ, СРЕДСТВ АВТОМАТИЗАЦИИ И СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ СССР

ОРДЕНА ЛЕНИНА ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ УПРАВЛЕНИЯ

В. И. ОПОЙЦЕВ

# РАВНОВЕСИЕ И УСТОЙЧИВОСТЬ В МОДЕЛЯХ КОЛЛЕКТИВНОГО ПОВЕДЕНИЯ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»

МОСКВА 1977

УДК 62—50

Опойцев В. И. **Равновесие и устойчивость в моделях коллективного поведения.** М., «Наука», 1977, с. 248.

Книга посвящена задачам статики и динамики сложных систем. Стержнем изложения является формальная модель коллективного поведения, охватывающая широкий класс задач из области управления, экономики, организации, биологии, техники и др. Большинство излагаемых вопросов в систематизированном виде ранее не рассматривалось (вопросы глобальной обратимости отображений и глобальной разрешимости неявных функций, ряд задач сравнительной статики, вопросы глобальной устойчивости ансамблей динамических систем с приложениями к анализу игровых моделей и ряд других). В доступной форме излагаются топологические методы с ориентацией на системные приложения. У читателя не предполагаются специальные математические познания, выходящие за рамки обычной программы технического вуза. Книга рассчитана на специалистов по теории управления, математической экономике и биологии. Она будет полезна также студентам и аспирантам, специализирующимся в указанных областях.

Илл. 10, библиогр. 105 назв.

Ответственный редактор
член-корреспондент АН СССР

С. В. ЕМЕЛЬЯНОВ

$О\frac{30501-529}{055(02)-77}823-77$

# ПРЕДИСЛОВИЕ

Объектом исследования в книге является некая формальная модель коллективного поведения, в рамки которой укладывается широкий класс задач из весьма различных областей (экономика, биология, управление, вычислительные алгоритмы, устойчивость движения и др.). Основные решаемые вопросы относятся к статике и динамике модели и играют важную роль при исследовании сложных нелинейных систем вообще. Поэтому рассматриваемые здесь методы могут оказаться полезными в иных областях приложений и для разных категорий читателей могут представлять интерес лишь отдельные главы. Последнее обусловило попытку по возможности автономного изложения различных результатов и методов. Например, роль результатов о глобальной обратимости отображений для исходной модели и соответствующих приложений объясняется в первой главе, играющей в книге связующую роль. Само же изложение указанных результатов в главе V не загромождается ссылками на источник задачи, и при этом используется нейтральная математическая терминология, что по замыслу должно облегчить участь тех читателей, которые прикладной аспект соответствующих теорем воспринимают в другом ракурсе.

О содержании книги легко судить по оглавлению. Однако часть материала нуждается в пояснениях, в первую очередь — изложение топологических методов. Сами по себе эти методы получили в настоящее время широкое распространение в исследованиях по нелинейному функциональному анализу, но они рассматриваются обычно в специальной математической литературе, что не способствует их популяризации в среде специалистов, профессионально не знакомых с топологией. С другой стороны, важность топологических методов для исследования сложных систем не вызывает сомнений, поэтому их внедрение в теорию управления сложными системами и приспособление к специфике решаемых здесь задач представляется весьма актуальным. По этой причине в книге и предпринята попытка рассмотрения этих методов с ориентацией на системные приложения. По-видимому, даже один тот факт, что топологические методы излагаются в монографии, которая, вообще говоря, адресована специалистам по системному анализу и близким дисциплинам, может сыграть положительную роль в их популяризации.

Существенная часть содержания книги — изложение методов нелинейного анализа в полуупорядоченных пространствах. Как ситуация, так и принимаемые меры здесь аналогичны предыдущим. Однако основное внимание в этой части изложения мы все же уделяем развитию новых методов и их приложению к задачам динамики.

Значительная часть текста посвящена вопросам глобальной устойчивости нелинейных систем. Исходная постановка задачи здесь выходит за рамки классической теории устойчивости и приводит к необходимости рассмотрения ансамблей динамических систем. Иллюстрационные примеры показывают, что подобная точка зрения заслуживает внимания и позволяет существенно расширить класс объектов, динамику которых мы можем изучать формальными методами.

Внутри каждой главы принята самостоятельная нумерация утверждений и формул. При ссылке на формулу или теорему другой главы дополнительно (римской цифрой) указывается номер главы. Конец доказательства обозначается символом ▲. Этот знак ставится сразу после формулировки теоремы, если доказательство дано выше или по тем или иным причинам вообще не приводится. Для удобства читателя в конце книги помещен список основных обозначений (не охватывающий Дополнения). Пояснения и литературные ссылки за небольшими исключениями вынесены в Комментарии.

В процессе работы над книгой автор постоянно общался с М. А. Красносельским — и это стимулировало постановку и решение некоторых интересных задач. Совершенствованию изложения в разнообразных его аспектах способствовали плодотворные обсуждения результатов с А. В. Малишевским. Трактовка ряда прикладных вопросов формировалась в творческих дискуссиях с В. Н. Бурковым. Указанным лицам и многим другим (тем, кто взял на себя труд прочитать рукопись книги или ознакомиться с ее отдельными частями) автор выражает искреннюю признательность и одновременно приносит извинения, так как не все полученные советы удалось учесть.

## Глава первая

# СОДЕРЖАТЕЛЬНЫЕ ПОСТАНОВКИ ЗАДАЧ

Если попытаться в двух словах охарактеризовать все последующее изложение *, то можно было бы сказать, что оно почти целиком посвящено задаче описания функционирования системы в целом на основе заданных алгоритмов поведения ее отдельных элементов. С определенной точки зрения такая задача весьма широко распространена. В этом плане можно интерпретировать даже изучение системы дифференциальных уравнений

$$\left.\begin{array}{l} \dot{x}_1=f_1(x_1, \ldots, x_n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dot{x}_n=f_n(x_1, \ldots, x_n) \end{array}\right\},$$

если считать, что переменной $x_i$ распоряжается некий (фиктивный) элемент $A_i$, алгоритмом поведения которого является $\dot{x}_i = f_i(x_1, \ldots, x_n)$. Несмотря на то, что этот пример выглядит до некоторой степени наивным, когда речь идет о «проблематике коллективного поведения», в известной мере он отражает существо дела и представляет собой простейший (в идейном отношении) вариант постановки задачи. Именно в подобном математическом выражении изучались поведенческие модели в экономике [29, 53, 56], ряд задач коллективного поведения автоматов [14], динамики популяций в биологии [20, 69] и т. д. Конечно, такая чересчур тривиальная формализация весьма сложных по своей природе процессов вызывает естественные нарекания, но в первом приближении она грубо улавливает суть проблемы. В рассматриваемом вопросе так или иначе мы имеем дело с понятием состояния системы и его эволюцией в непрерывном или дискретном времени (т. е. с динамикой системы). Другое дело, что точное описание динамических процессов, протекающих в системе, довольно часто бывает неизвестным. Эти процессы могут быть в какой-то степени неопределенными, могут иметь игровую окраску (системы, состоящие из взаимосвязанных элемен-

* Говорят, что однажды Л. Н. Толстой на просьбу передать в двух словах содержание романа «Анна Каренина» ответил: «Если бы я мог это выразить в двух словах, я бы не писал роман».

тов, преследующих индивидуальные цели) и т. п. К изучению именно такого типа систем и подходит сейчас теория управления.

Несмотря на многообразие содержательных интерпретаций, задачи подобного рода (по крайней мере их солидная часть) поддаются единообразному описанию и изучению едиными методами. Мы начнем с описания формальной модели, вокруг которой развивается последующее изложение. В дальнейшем модель иллюстрируется примерами, уточняется и модернизируется.

## § 1. Формальная модель и основные задачи

Пусть система состоит из $n$ взаимосвязанных элементов $A_i\,(i=1, \ldots, n)$. Элемент $A_i$ распоряжается выбором величины $x_i \in [v_i^0, w_i^0]$, состояние системы характеризуется вектором $\boldsymbol{x} = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Множество допустимых состояний системы*

$$\langle \boldsymbol{v}^0, \boldsymbol{w}^0 \rangle = [v_0^1, w_0^1] \times \ldots \times [v_0^n, w_0^n].$$

Для каждого $i$ при любом допустимом $\boldsymbol{x} \in \langle \boldsymbol{v}^0, \boldsymbol{w}^0 \rangle$ существует единственная точка

$$\hat{x}_i = f_i(\boldsymbol{x}) \in [v_i^0, w_i^0],$$

которую будем называть *положением цели* $i$-го элемента.

Время функционирования системы может быть дискретным (разбито на периоды с номерами $k=0, 1, \ldots$) и непрерывным. В том и другом случае гипотеза о поведении элементов состоит в следующем *(аксиома индикаторного поведения): каждый элемент $A_i$ с течением времени изменяет значение собственной переменной в направлении к текущему положению цели $\hat{x}_i$, т. е. движется по направлению к поверхности $x_i = f_i(\boldsymbol{x})$.*

В дискретном случае подобная тактика поведения может быть описана итерационной процедурой

$$\forall\, i,\ k : x_i^{k+1} = x_i^k + \gamma_i^k\,[f_i(\boldsymbol{x}^k) - x_i^k],\quad \gamma_i^k \in [0, 1], \tag{1.1}$$

где $x_i^k$ — точка на сегменте $[v_i^0, w_i^0]$, которую элемент $A_i$ выбирает в $k$-м периоде.

Конкретное значение $\gamma_i^k$, определяющее величину шага $\Delta x_i^k = x_i^{k+1} - x_i^k$, может зависеть от времени, текущего состояния и некоторых других факторов $\alpha$, внешних по отношению к модели. Ограничение $\gamma_i^k \leqslant 1$ означает, что в системе отсутствует «перерегулирование», т. е. каждый $A_i$ делает шаг не больший, чем расстояние (по направлению $x_i$) от $\boldsymbol{x}^k$ до поверхности $x_i = f_i(\boldsymbol{x})$. Для частного случая двухэлементной системы, в которой $f_i(\boldsymbol{x})$ не зависит

* Допускается, что $v_i^0$, $w_i^0$ могут принимать бесконечные значения.

явно от $x_i$, геометрический аналог процедуры (1.1) изображен на рис. 1. В соответствии с (1.1) в $(k+1)$-й момент времени система может попасть в любую точку заштрихованного прямоугольника.

В случае непрерывного времени гипотеза индикаторного поведения приводит к системе дифференциальных уравнений

$$\forall i,\ t \geqslant 0 : \dot{x}_i = \tilde{\gamma}_i (t, x, \alpha) [f_i (x) - x_i],\ \tilde{\gamma}_i \geqslant 0, \tag{1.2}$$

которая означает, что направление скорости $\dot{x}_i$ совпадает с направлением отрезка $f_i(x) - x_i$, т. е.

$$\operatorname{sign} \dot{x}_i = \operatorname{sign} [f_i (x) - x_i].$$

Каждая конкретная реализация процесса (1.2) удовлетворяет системе дифференциальных уравнений

$$\forall i,\ t \geqslant 0 : \dot{x}_i = \gamma_i (t) [f_i (x) - x_i],\ \gamma_i \geqslant 0, \tag{1.3}$$

т. е. каждой реализации соответствует свой набор функций $\gamma_i(t)$, которые в дальнейшем предполагаются ограниченными.

Процедуры (1.1) и (1.3) будем записывать далее также в векторном виде

$$\forall k : x^{k+1} = x^k + \Gamma_k [F (x^k) - x^k], \tag{1.4}$$

$$\forall t : \dot{x} = \Gamma (t) [F (x) - x], \tag{1.5}$$

где $F(x) = \{f_1(x), \ldots, f_n(x)\}$, $\Gamma_k = \operatorname{diag} \{\gamma_1^k, \ldots, \gamma_n^k\}$; $\Gamma(t) = \operatorname{diag} \{\gamma_1(t), \ldots, \gamma_n(t)\}$.

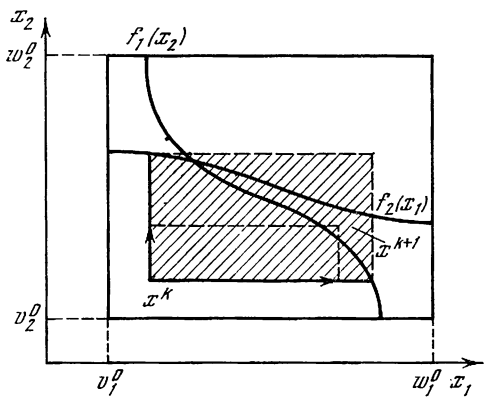



Рис. 1

Перейдем теперь к обсуждению основных задач, которые естественным образом возникают при рассмотрении этого простейшего варианта модели. Заметим, что обсуждение носит пока неформальный характер, и по этой причине второстепенные детали не уточняются.

Содержательно наиболее простым, но практически весьма важным (и зачастую довольно сложным) является вопрос о существовании у системы положения равновесия. Как следует из описания динамики, положение равновесия системы — это неподвижная точка *оператора межэлементных связей* $F(x)$, т. е.

точка $\boldsymbol{x}^*$, удовлетворяющая уравнению

$$\boldsymbol{x} = F(\boldsymbol{x}). \tag{1.6}$$

Немаловажный фактор также — единственность решения (1.6), т. е. единственность положения равновесия; это второй, часто весьма трудный вопрос.

Отметим сразу, что указанные задачи статики могут ставиться в несколько иной форме. Дело в том, что исходное описание системы нередко бывает заданным не в виде оператора межэлементных связей $F(\boldsymbol{x})$, а в виде оператора $G(\boldsymbol{x}) = \{g_1(\boldsymbol{x}), \ldots \ldots, g_n(\boldsymbol{x})\}$, который связан с $F(\boldsymbol{x})$ соотношениями *

$$\forall i : \operatorname{sign} g_i(\boldsymbol{x}) = \operatorname{sign}(f_i(\boldsymbol{x}) - x_i);$$

$$\forall i : g_i(x_1, \ldots, x_{i-1}, f_i(\boldsymbol{x}), x_{i+1}, \ldots, x_n) = 0,$$

и каждая функция $g_i(\boldsymbol{x})$ убывает по $x_i$. Такие функции $g_i(\boldsymbol{x})$ называются функциями-индикаторами. Динамику системы в этом случае удобнее изучать непосредственно в форме

$$\forall i, t : \dot{x}_i = \gamma_i(t) g_i(\boldsymbol{x}), \ \gamma_i \geqslant 0,$$

что (в очевидных предположениях) эквивалентно предыдущему. При этом задачи статики более естественно относить к вопросу о существовании и единственности решения уравнения

$$G(\boldsymbol{x}) = 0. \tag{1.7}$$

Конечно, (1.7) легко приводится к виду (1.6), и наоборот, но это не всегда удобно.

Следующий цикл вопросов относится к динамике системы: устойчиво ли равновесие, сходятся ли к нему все траектории из любого начального положения, обладает ли система свойством асимптотической устойчивости и т. п. Формулировка этих вопросов пока апеллирует лишь к интуитивным аналогиям с классической теорией динамических систем. Процедуры типа (1.4), (1.5), по существу, описывают не одну динамическую систему, а целый ансамбль динамических систем [каждой системе ансамбля соответствует своя траектория (реализация)]. Поэтому различные свойства устойчивости здесь должны быть определены «заново».

Несколько более подробно стоит остановиться на вопросе о сходимости траекторий к положению равновесия. В рамках указанных ограничений $\gamma_i^k \in [0, 1]$, $\gamma_i(t) \geqslant 0$ элементы могут просто «стоять на месте» ($\gamma_i^k \equiv 0$, $\gamma_i(t) \equiv 0$) или «сходиться» к положению, отличному от равновесного [если $\gamma_i^k(\gamma_i(t))$ с ростом времени слишком быстро стремятся к нулю]. Чтобы исключить

* В этом случае функции $f_i(\boldsymbol{x})$ не должны явно зависеть от $x_i$.

эти патологические, малоинтересные в содержательном отношении случаи, оказывается достаточным, соответственно в дискретном и непрерывном вариантах, наложить дополнительные ограничения

$$\forall i: \sum_k \gamma_i^k = \infty, \quad \int_0^\infty \gamma_i(t)\,dt = \infty. \tag{1.8}$$

Траектории, удовлетворяющие этим условиям, называются *невырожденными*. Содержательный смысл невырожденности траектории заключается в том, что в системе не существует слишком «ленивых» элементов, которые бы «успокаивались», не достигнув цели.

## § 2. Примеры и комментарии

Рассматриваемые здесь примеры не только иллюстрируют модель, но и представляют возможность содержательной интерпретации излагаемых далее результатов. По этой причине их число несколько превышает тот минимальный уровень, которым можно было бы ограничиться, преследуя единственную цель показать, что существуют конкретные задачи, укладывающиеся в предлагаемую схему.

Пример 1. При условии $\forall i, k: \gamma_i^k = 1$ процедура (1.4) переходит в обычную итерационную процедуру $x^{k+1} = F(x^k)$, которая широко используется в качестве вычислительного алгоритма для решения уравнений. В непрерывном случае при условии $\forall i: \gamma_i(t) \equiv 1$ мы приходим к автономной системе дифференциальных уравнений $\dot{x} = G(x)$, к изучению которой сводятся самые разнообразные задачи.

Пример 2. Пусть элементы $A_i$ являются игроками, причем $x_i$ — стратегия $A_i$, а $D_i(x)$ — функция выигрыша $A_i$. Положение цели $i$-го элемента естественно определить как положение условного максимума его функции выигрыша (по собственной переменной при фиксированных стратегиях остальных игроков), т. е.

$$\forall i: D_i(x_1, \ldots, x_{i-1}, f_i(x), x_{i+1}, \ldots, x_n) = \max_{x_i} D_i(x).$$

Неподвижная точка оператора $F(x)$ будет здесь точкой Нэша [66]. Если суммарный выигрыш каждого элемента складывается из его выигрышей в последовательности партий, то представляется интуитивно естественным считать (см. обсуждение следующего примера), что тактика игроков имеет вид (1.1). Тот факт, что игроки в действительности используют весьма различные соображения для выбора шага $\Delta x_i^k$ и это приводит к последовательностям $\{\gamma_i^k\}$ весьма неопределенного вида, может объясняться по крайней мере двумя обстоятельствами. Во-первых, полный шаг ($\gamma_i^k=1$), который по первому впечатлению представляется наиболее выгодным, в результате совместных действий остальных элементов может приводить к уменьшению ожидаемого выигрыша $A_i$,— и это часто заставляет элементы действовать более осторожно. Во-вторых, определение истинного положения цели бывает затруднено. При этом элемент определяет лишь направление роста своего выигрыша и по грубой прикидке делает шаг в этом направлении *.

Пример 3. Этот пример, по существу,— частный случай предыдущего, но здесь общая схема наполняется конкретным содержанием. В каждый плановый период некий центральный орган (ЦО), которому подчинены $n$ элементов (производителей), располагает запасом ресурса (сырья) в количестве $R$ и выдает элементу $A_i$ ресурс в количестве $r_i$ по цене $\lambda$. Функция выигрыша $A_i$ имеет вид $D_i=\alpha_i\sqrt{r_i}-\lambda r_i$ (здесь $\alpha_i\sqrt{r_i}$ — функция дохода $A_i$, так что $\alpha_i\sqrt{r_i}-\lambda r_i$ — его прибыль). Если бы ЦО знал коэффициенты $\alpha_i$, то, например, задача максимизации суммарного дохода системы $\sum\limits_i \alpha_i\sqrt{r_i}$ была бы тривиальной. На практике, однако, представления всякого управляющего органа об элементах нижнего уровня, как правило, неточны (в известной мере ошибочны). Как бы там ни было, предположим, что ЦО известны лишь границы $v_i^0, w_i^0$, в которых находятся коэффициенты $\alpha_i$. Информацию ЦО получает следующим образом: просит $A_i$ назвать значение $\alpha_i$, элемент отвечает: «$x_i$» (правду $A_i$ говорить не обязан, но должен оставаться в рамках ограничений $x_i\in[v_i^0, w_i^0]$). На основе вектора $\boldsymbol{x}$ ЦО распределяет ресурс и назначает цену.

Пусть ЦО действует в соответствии с принципом открытого управления, тогда

$$r_i=\frac{Rx_i^2}{\sum\limits_j x_j^2}, \qquad \lambda=\frac{1}{2\sqrt{R}}\sqrt{\sum_j x_j^2}. \tag{2.1}$$

После подстановки (2.1) в $D_i$ имеем:

$$D_i=\alpha_i\sqrt{r_i}-\lambda r_i=\sqrt{R}\;\frac{x_i\left(\alpha_i-\frac{1}{2}x_i\right)}{\sqrt{\sum\limits_j x_j^2}}. \tag{2.2}$$

Итак, функционирование системы представляет собой бесконечную последовательность партий с функциями выигрыша (2.2).

* Вообще говоря, для игровых моделей более адекватными представляются некоторые модификации модели (см. § 3).

Вообще говоря, содержательную начинку системы теперь можно забыть. Мы имеем повторяющуюся игру с функциями выигрыша (2.2). Пытаясь убедить читателя в том, что подобная система будет функционировать в соответствии с процедурой (1.1), мы поневоле должны обращаться к аргументам из области человеческой психологии. Отношение к такой аргументации в свою очередь определяется факторами из той же области, и в конечном итоге является вопросом веры. Но здесь существует и более веский аргумент. Эта система моделировалась и неоднократно «проигрывалась» на различных участниках. Всякий раз участники неизменно после нескольких итераций приходили в точку Нэша, а их поведение было близко к (1.1).

Если для некоторых классов игр подобный факт и представляется вполне закономерным, то в данном случае, по здравому размышлению, наличие в системе индикаторного поведения выглядит довольно неожиданным, поскольку обнаруживается в ситуации, где оно «невыгодно». Поясним сказанное. Пусть для простоты все $\alpha_i$ равны единице и все нижние пределы $v_i^0$ равны $10^{-2}$ (а все $w_i^0 = \infty$). Легко показать, что равновесной по Нэшу будет точка с координатами

$$\forall i : x_i = \frac{2n-2}{2n-1}.$$

В этой точке выигрыш каждого игрока будет равен $D_i \approx \approx (1/2)\sqrt{R/n}$. В точке же $x$ с координатами $x_i = 10^{-2}$ выигрыш каждого примерно в 2 раза больше $D_i \approx \sqrt{R/n}$. В смысловом отношении результат совершенно прозрачен: пропорциональное уменьшение величин $x_i$ не меняет распределения ресурса, но вызывает уменьшение цены (что и дает увеличение каждого индивидуального выигрыша). Таким образом, индикаторное поведение приводит здесь к положению равновесия, в котором все получают вдвое меньше, чем могли бы. И аналогичная ситуация встречается каждый раз, когда точка Нэша не лежит в множестве Парето *. Тот факт, что индикаторное поведение присутствует даже в таких играх, показывает, что оно действительно отражает некие реальные психологические мотивы общего характера, хотя, конечно, при анализе подобных игровых систем нужно соблюдать определенную осторожность.

Автору приходилось быть участником описанной игры, а также приходилось наблюдать, как после участия в игре рассеивался скептицизм тех, кто приступал к игре с надеждой попасть в оптимум Парето. Личные впечатления сводятся к следующему. Когда участники недостаточно понимают природу игры, инди-

* Точка $x$ называется оптимальной по Парето, если не существует другой точки, в которой значение каждой функции выигрыша не меньше предыдущего (а хотя бы одной — больше). Совокупность таких точек называется множеством Парето.

каторное поведение кажется им совершенно разумным и естественным, а равновесие по Нэшу не представляется злом. Этот случай, по существу, малоинтересен. В том случае, когда участники досконально разбираются в тонкостях игры, как правило, в первой партии все выбирают минимально возможные значения $x_i$ (величины $x_i$ будем условно называть запросами). Цена при этом мала, распределение ресурса сносное — все выигрывают «достаточно много». Ситуация сохраняется на протяжении нескольких партий (система находится в оптимуме Парето). Однако у каждого существует соблазн увеличить свой запрос (если запросы остальных не изменятся, то цена останется практически прежней, так как индивидуальное влияние на цену мало, количество получаемого ресурса увеличится — и это даст прибавку в выигрыше). В конце концов у кого-нибудь не выдерживают нервы и, поддавшись «грешному желанию» выиграть еще больше, он увеличивает запрос. Выигрыш инициатора возрастает, но растет и цена (хотя и незначительно). Остальным это не нравится.

В следующей партии одни из «черной зависти», другие, желая продемонстрировать нарушившему молчаливую коалицию возможные неблагоприятные последствия, также увеличивают свои запросы. Далее каждый, стремясь уйти от преследователей, продолжает увеличивать свой запрос все сильнее. Наконец все попадают в точку Нэша. Увеличивать запросы более не имеет смысла (явно невыгодно). Наступает момент прозрения, но уже поздно. Каждый не прочь вернуть систему в исходное положение, но это можно сделать только сообща. После нескольких партий находится один или несколько благоразумных, которые уменьшают запросы, но остальные выжидают, желая посмотреть, что будет, или «поживиться» за счет других. В результате первые несут потери, а вторые выигрывают. Тогда первые снова увеличивают запросы, занимая более выгодную в данной ситуации выжидательную позицию. После нескольких разрозненных попыток такого рода система успокаивается, оставаясь в точке Нэша.

Пример 4. *Модель установления рыночных цен.* Пусть на рынке имеется $n$ видов товаров, цена на $i$-й товар обозначается $\lambda_i$, спрос на него $\pi_i(\lambda)$, предложение $\varkappa_i(\lambda)$. Функция

$$\chi_i(\lambda)=\chi_i(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)=\pi_i(\lambda)-\varkappa_i(\lambda)$$

называется функцией избыточного спроса. Если $i$-й продавец (элемент) продает $i$-й товар, то естественной тактикой его поведения представляется увеличение цены $\lambda_i$, если избыточный спрос $\chi_i(\lambda)$ больше нуля, и уменьшение $\lambda_i$, если $\chi_i(\lambda)<0$. Таким образом, $\chi_i(\lambda)$ может быть принята здесь за функцию-индикатор.

В этом и некоторых других последующих примерах мы сталкиваемся с необходимостью изучения динамических систем, точное количественное описание которых, по существу, не задано.

Действительно, трудно рассчитывать, что исследователю будут известны функции избыточного спроса сколько-нибудь точно в широких пределах изменения цен. В подобных ситуациях поначалу обычно возникает ощущение безвыходности. Как можно говорить об устойчивости, если мы ничего не знаем о системе? Конечно, чудес не бывает, и поэтому при полном отсутствии информации вопрос об устойчивости действительно не имеет смысла. Но в таких случаях, как правило, все-таки есть информация качественного характера, и часто этого оказывается достаточно.

Не вдаваясь в подробности детального изучения свойств функций избыточного спроса, отметим лишь самые элементарные из них. Как правило, считают, что товары на рынке могут находиться в одном из двух возможных отношений. Если $\chi_j(\lambda)$ не убывает при возрастании $\lambda_i$, то говорят, что $j$-й товар — (слабый) валовый заменитель $i$-го, если же $\chi_j(\lambda)$ не возрастает при увеличении $\lambda_i$, то говорят, что $j$-й товар обладает свойством (слабой) валовой дополнительности по отношению к $i$-му товару *. В экономической литературе в основном изучались рыночные модели с валовой заменимостью товаров, в меньшей степени — с валовой дополнительностью товаров и почти совсем не исследовались смешанные рынки. Качественная информация в последнем, наиболее общем случае, казалось бы, крайне бедна. Известно лишь, что функции-индикаторы системы по каждой в отдельности переменной или возрастают, или убывают. Но, как будет видно из дальнейшего, и этот факт можно весьма эффективно использовать.

Заметим наконец, что модель рынка можно рассматривать и с иной точки зрения. Пусть на рынке нет самостоятельных продавцов, а есть управляющий орган, заинтересованный в достижении равновесия. При отсутствии должной информации в этом случае, пожалуй, ничего не остается делать, кроме как производить независимую регулировку цен по рассогласованию спроса и предложения. Сущность модели изменяется, а формальное описание остается прежним.

Пример 5. *Модель сосуществования биологических видов.* Пусть $N_i$ — численность популяции $i$-го вида. Очевидно, при заданном наборе $N_1, \ldots, N_{i-1}, N_{i+1}, \ldots, N_n$ из-за ограниченности ресурсов (пища, площадь обитания и пр.) существует стационарное значение численности $\hat{N}_i = f_i(N)$, при котором процессы размножения и гибели индивидуумов данного вида взаимно

---

* Мясо и рыба, например,— валовые заменители, так как представляется естественным, что увеличение цены на мясо приведет к увеличению спроса на рыбу (мясо станут покупать в меньшем количестве, а для поддержания калорийности питания рыбу — в большем). Примером товаров, находящихся в отношении валовой дополнительности, могут служить сигареты и спички. При увеличении цены на сигареты курить станут меньше — потребность в спичках (а значит, и спрос на них) уменьшится.

компенсируют друг друга. Естественным выглядит предположение, что численность популяции $i$-го вида возрастает при $N_i < \hat{N}_i$ и убывает при $N_i > \hat{N}_i$, т. е.

$$\forall i: \dot{N}_i = \gamma_i(t)\,[f_i(N) - N_i].$$

Качественная информация о функциях $f_i(N)$ имеет примерно такой же вид, как и в рыночной модели. Если в системе отсутствуют отношения типа «хищник — жертва», то получается что-то вроде рынка с валовой дополнительностью товаров (если $N_i$ возрастает, то пищи и других «благ» $j$-му виду остается меньше, и $\hat{N}_j$ убывает). В общем случае $f_i(N)$ опять обладает своеобразным свойством обобщенной монотонности [по каждой переменной функция $f_i(N)$ или убывает, или возрастает]. Просмотр большого числа примеров из различных областей показывает, что свойство обобщенной монотонности операторов межэлементных связей весьма широко распространено. Это оправдывает выделение так называемых гетерогенных систем (см. далее) в самостоятельный объект изучения.

Пример 6. Пусть имеется система $n$ обслуживающих устройств $A_i$, подразделенных на $m$ непересекающихся групп $K_j$. Каждый элемент $A_i$ обладает пропускной способностью $\xi_i$. Каждая группа $K_j$ имеет свой диспетчерский пункт $D_j$, на котором величина потока клиентов к $D_j$ делится между элементами данной группы пропорционально их пропускным способностям. Качество обслуживания $A_i$, изменяя которое элемент может так или иначе влиять на перераспределение потоков клиентов, будем характеризовать величиной $x_i$. Цель $A_i$ состоит в обеспечении оптимальной для себя загрузки $\xi_i$. Индикаторное поведение в этом случае выглядит достаточно естественным.

Правдоподобным здесь представляется также следующее предположение. Если элемент $A_i$ принадлежит группе $K_j$, то улучшение качества обслуживания остальными элементами этой группы приводит к увеличению потока клиентов к $D_j$ и соответственно к увеличению загрузки $A_i$. Улучшение же качества обслуживания элементами, не принадлежащими $K_j$, приводит к уменьшению потока клиентов к $D_j$ и соответственно к уменьшению загрузки $A_i$. В соответствии с этим разумно признать, что каждая функция $\hat{x}_i = f_i(x)$ не возрастает по переменным $x_k$, если $A_i$ и $A_k$ принадлежат одной группе, и не убывает по остальным переменным. Таким образом, $f_i(x)$ снова обладает свойством обобщенной монотонности.

Пример 7. Пусть $n$ электрических сопротивлений $R_i$ подключены последовательно к источнику с напряжением $E$ и внутренним сопротивлением $r$. Каждое переменное сопротивление $R_i$ снабжено соответствующим регулятором. Регулятор находится в распоряжении элемента (оператора) $A_i$, цель которого состоит в поддержании на своем сопротивлении напряжения $V_i^0$.

Функцией-индикатором здесь может служить

$$g_i(\boldsymbol{R}) = V_i^0 - \frac{ER_i}{r + \sum_j R_j}.$$

## § 3. Модификации модели и смежные вопросы

Как уже отмечалось, описанный в § 1 вариант модели — простейший и не отражает ряд аспектов некоторых содержательных задач, которые было бы естественно отнести к изучаемой тематике. Так, например, в поле зрения рассмотренной модели находились лишь параметры, характеризующие состояние самой системы. В то же время в ряде задач существенную роль играют внешние воздействия на систему (управления). К примеру, в модели сосуществования биологических видов (§ 2) стационарная численность каждого вида может быть функцией не только вектора $\boldsymbol{N}$, но и некоторого вектора $\theta$, символизирующего влияние окружающей среды. В частности, вектор $\theta$ может характеризовать управляющие воздействия, такие, как отстрел и подкормка животных. Учет подобных факторов на модельном уровне приводит к необходимости рассмотрения систем с функциями-индикаторами $g_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, зависящими от вектора $\boldsymbol{y}$, который определяет внешние воздействия. Уже при рассмотрении статических вопросов здесь возникает целая серия новых проблем. Положение равновесия $\boldsymbol{x}^*$, удовлетворяющее уравнению

$$G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0, \tag{3.1}$$

теперь является функцией $\boldsymbol{y}$. Пусть $\boldsymbol{x} \in X$, $\boldsymbol{y} \in Y$. Здесь требуют решения следующие вопросы: при любом ли $\boldsymbol{y} \in Y$ существует решение (3.1), при любом ли $\boldsymbol{y} \in Y$ оно единственно, непрерывно ли изменяется положение равновесия при изменении $\boldsymbol{y}$? Цикл этих вопросов рассматривается далее под общим заголовком «Глобальная разрешимость неявных функций». В частном случае $G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \tilde{G}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{y}$ указанные вопросы приобретают более специальный вид, попадая в рамки задачи о глобальной обратимости отображений.

Изучение уравнений типа (3.1) сопряжено также с решением задач сравнительной статики, в основе которых обычно лежит качественный вопрос: как характер смещения положения равновесия зависит от характера изменения внешних воздействий? Последний приобретает особенно важное практическое значение при исследовании систем, точное количественное описание которых не известно.

Что касается динамики, то видоизменение проблематики здесь очевидно. Вместо траекторий $\boldsymbol{x}(t)$ приходится следить за траекториями $\{\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{y}(t)\}$.

Не всегда, однако, конкретные задачи оказываются содержательно более емкими, чем исходная модель, скорее наоборот. И тогда разумнее упростить модель, чтобы не «палить из пушек по воробьям». Так, например, доказывая сходимость всех невырожденных траекторий (1.4) или (1.5) к положению равновесия, мы получаем зачастую гораздо больше, чем того требует конкретный смысл задачи. Может оказаться, что множество несходящихся траекторий чрезвычайно мало по сравнению с множеством сходящихся. Если при этом величины $\gamma_i^k$ или функции $\gamma_i(t)$ — случайные (такое предположение выглядит правдоподобным в игровых моделях), то ситуацию можно признать вполне удовлетворительной. Такая точка зрения тем более заслуживает внимания, поскольку для изучения вероятностных процессов существует хорошо разработанный язык (сходимость по вероятности, почти наверное, в среднеквадратическом).

Рассмотрение игровых моделей приводит также к мысли видоизменить модель в несколько ином направлении. Как правило, в реальных ситуациях, попадающих под общую схему примера 2 (§ 2), функции выигрыша $D_i(\boldsymbol{x})$ элементам неизвестны. Элемент $A_i$ располагает лишь локальной информацией о собственной функции выигрыша, зная поведение $D_i(\boldsymbol{x})$ в некоторой малой окрестности точки, в которой находится система. Еще лучше сказать, что $A_i$ в состоянии оценить лишь направление роста $D_i(\boldsymbol{x})$ по собственной переменной (близкую по духу ситуацию можно наблюдать в рыночной модели). В таких условиях гипотеза индикаторного поведения представляется наиболее правдоподобной, и все остается по-старому, если система функционирует в непрерывном времени. В дискретном же случае процедуру (1.1) можно считать адекватной реальным динамическим процессам лишь в предположении, что элементы делают в нужном направлении заведомо малые шаги. Не будучи уверенным в этом, едва ли можно считать выполненным ограничение $\forall i,\ k: \gamma_i^k \leqslant 1$, так как элементы не располагают информацией для вычисления текущих положений цели. Если указанное предположение не выполняется, то приходится изучать итерационную процедуру вида

$$\forall\, i,\, k: x_i^{k+1} = x_i^k + \xi_i^k \operatorname{sign} g_i(\boldsymbol{x}^k), \tag{3.2}$$

где $\xi_i^k \geqslant 0$ обозначает длину шага $\xi_i^k = |x_i^{k+1} - x_i^k|$. Конечно, о сходимости траекторий (3.2) не может быть речи при отсутствии тех или иных ограничений на последовательности $\{\xi_i^k\}$. Одним из естественных ограничений представляется условие $\forall\, i: \xi_i^k \to 0$ (при дополнительном требовании невырожденности $\forall\, i: \sum\limits_k^{\infty} \xi_i^k = \infty$).

Запись (3.2) допускает также другую трактовку. Можно считать, что элементы движутся в «нужном» направлении лишь в среднем, т. е. $\xi_i^k$ — случайные величины, которые могут принимать даже отрицательные значения, но имеют положительные математические ожидания $m_i^k$. Аналогом условия $\forall i: \xi_i^k \to 0$ будет $\forall i: m_i^k \to 0$. В дальнейшем процедуры такого типа будут подробно исследованы (с уточнением деталей).

На первый взгляд существенным ограничением представляется тот факт, что в исходной модели рассматриваются системы, состоящие из «скалярных» элементов, т. е. из элементов, которые распоряжаются лишь скалярными переменными. Но в такую модель укладываются и системы с векторными элементами, что связано с условностью ответа на вопрос: что считать элементом системы? Рассмотрим, например, модель рынка, в которой каждый продавец торгует сразу несколькими товарами, распоряжаясь одновременно целым набором цен, т. е. вектором. Опять естественной здесь выглядит независимая регулировка цен (каждую в отдельности цену продавец повышает или понижает в зависимости от знака соответствующего избыточного спроса). При этом все сводится к изучению процедур типа (1.4) или (1.5), т. е. на модельном уровне векторные элементы как бы дезагрегируются в скалярные. Другими словами, векторные элементы $\tilde{A}_i$ распадаются на совокупности независимо действующих скалярных элементов $\{\tilde{A}_{ij}\}$.

Для возможности подобного формального описания системы, конечно, нужно иметь достаточные основания в виде тех или иных содержательных предпосылок. Рассмотренный способ моделирования систем с векторными элементами (состоящий в дезагрегации элементов) не исключает возможности рассмотрения процедур типа (1.4), (1.5), в которых $x_i$ не скаляр, а вектор.

## § 4. Несколько замечаний

Термин «коллективное поведение» употребляется часто в связи с рассмотрением весьма разнообразных задач. Поскольку описанная выше модель также получила название модели коллективного поведения, здесь представляется уместным попытаться охарактеризовать проблематику коллективного поведения в целом и сопоставить ее с объемом задач, охватываемых предложенной схемой.

Интересный взгляд на проблему представляет собой направление исследований по коллективному поведению автоматов, начатое М. Л. Цетлиным [78]. В его основе лежит изучение связи между простейшими формами поведения элементов и целесообразностью функционирования системы в целом. Точнее говоря, рассматриваются некоторые классы игр автоматов и выясняется, что весьма примитивные автоматы «сообща» в состоянии удовлетворительно решать такие игры. По всей видимости, подобная точка зрения полезна и продуктивна для задач физиологии, что неоднократно отмечали М. Л. Цетлин и другие исследователи. Действительно, мозг человека, например, состоит из большого числа нейронов, которые выполняют довольно простые функции, но в совокупности обнаруживают возможности приспособительных реакций к самым разнообразным влияниям окружающей среды. При переходе к экономическим и организационным системам (которые в настоящее время лежат в основе утилитарных интересов современной теории управления) ситуация несколько меняется. В том и другом случае на модельном уровне можно говорить об играх (в широком смысле этого слова) и об игроках, автоматах или просто элементах системы. Однако в экономических системах (для определенности можно иметь в виду прототип рыночной модели) отношение элемента к игре несколько иное. В играх автоматов элемент (автомат) не имеет ни малейшего представления об игре, в которой участвует *. В экономических системах информация элемента об игре (о функциях выигрыша) часто ограничена (не полна), но все-таки имеется. Здесь элемент (коллектив людей) располагает, как правило, качественными представлениями об игре, в состоянии оценить последствия принимаемых решений и т. п.

Если ориентироваться на изучение систем, функционирование которых в той или иной степени зависит от поведения людей (от наличия в системе человеческого фактора), естественно признать, что проблематика коллективного поведения есть не что иное, как совокупность вопросов, относящихся к выяснению того, как протекают те или иные конкретные игры (подразумевается свободное толкование термина «игра»). Знание же характера течения игры является первостепенным по важности для ряда экономико-организационных задач. Дело в том, что часто элементы, «играя» между собой, производят некий полезный продукт, выполняют заказ и т. п. [1, 2].

Заметим сразу, что классическая теория игр не занимается решением подобного сорта вопросов, и вообще игры Дж. фон Неймана малопригодны для этой цели. Здесь достаточно вспомнить известные «парадоксы» теории игр типа «дилеммы заключенного» или «семейного спора», которые в избытке дают пищу для экзотических рассуждений, но не более. Причина этого заключается в одноразовости игры, в одноактности выбора стратегий. Вместе с тем обращает на себя внимание тот факт, что функционирование многих реальных систем больше походит на «игру», состоящую из бесконечной последовательности однотипных партий. Концентрация внимания на «повторяющихся играх», по-видимому,— один из залогов успеха.

---

* В этом как раз заключается определенная пикантность ситуации. Не зная «во что играют», автоматы все-таки коллективно играют хорошо.

Конечно, проблема здесь должна быть уложена в более тесные границы, которые бы, с одной стороны, позволили перейти от общих рассуждений к конкретным результатам, а с другой — были бы приемлемыми в прикладном отношении. При этом, по-видимому, надо ориентироваться на следующее обстоятельство. В одних жизненных ситуациях разные люди ведут себя существенно по-разному, в других — более или менее одинаково, функционирование одних систем кардинальным образом меняется в зависимости от поведения людей, других — в определенных пределах не зависит от поведения человека или по крайней мере не меняется в качественном отношении. Наиболее благоприятны для исследования системы, в которых человек поставлен в такие условия, что качественные характеристики его поведения практически одинаковы для всех людей, а количественные различия не приводят к изменению качественной картины функционирования системы в целом. На исследование именно такого класса систем и ориентирована предлагаемая здесь модель, в которой элемент (человек) ставится перед решением простой задачи выбора направления шага (и здесь все люди предполагаются одинаковыми). На долю темперамента и других морально-психологических свойств отводится свобода в выборе величины шага.

Таким образом, изучаемая модель, безусловно, не исчерпывает проблематику коллективного поведения, но охватывает некоторую ее существенную часть, в которой можно реально надеяться на конкретные результаты без использования информации о «психологических типах» элементов, их «моральном облике» и других уязвимых для критики факторах. Характер примеров § 2 (но не их число) показывает, что в поле зрения здесь попадает широкий класс практически важных задач.

Вместе с тем те же примеры показывают, что с бо́льшим основанием изучаемый круг вопросов следовало бы отнести к другой общей проблеме, которую условно можно было бы назвать «статика и динамика сложных систем». Хотя пока еще нет общепринятого определения сложной системы, несомненно, что при изучении любой системы (помимо прочих) присутствуют два аспекта: статический и динамический. Классическая теория автоматического регулирования занималась в основном линейными и довольно простыми нелинейными системами, и по этой причине задачи статики там не выросли в самостоятельный раздел. При переходе к более сложным системам важность задач статики существенно возрастает. Что касается динамики, то здесь также очевидно, что в общем случае нельзя ограничиться детерминированными моделями. Динамические процессы в сложных системах часто характеризуются наличием неопределенных факторов, и в большинстве случаев приходится иметь дело не с одной траекторией, а с множеством возможных. Другими словами, приходится иметь дело не с одной динамической системой, а с их ансамблями (определение будет дано позже). Процедуры (1.4) и (1.5) можно рассматривать в качестве формализованного описания такого типа динамических процессов специального вида.

Как и в классической теории, важную роль здесь играют вопросы устойчивости. Коль скоро мы намерены заниматься изучением не только непрерывных систем, но и дискретных, на существенности понятия устойчивости надо остановиться несколько подробнее. Пока будет достаточно ограничиться случаем обычной итерационной процедуры $x^{k+1} = F(x^k)$, для которой равновесной будет неподвижная точка $x^*$ оператора $F$. По аналогии с непрерывным случаем устойчивость $x^*$ естественно определить так: $x^*$ называется устойчивой, если по любой окрестности $V$ (точки $x^*$) можно указать такую окрестность $W$ (точки $x^*$), что траектория, начинающаяся в $W$, не выходит за пределы $V$. Как ни странно, при изучении итерационных процедур обычно ограничиваются вопросом сходимости траекторий, вовсе не

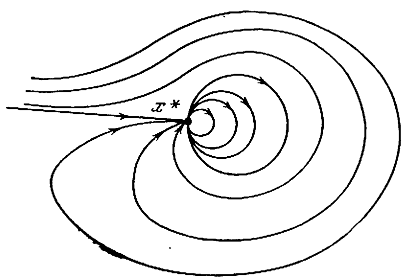



Рис. 2

касаясь устойчивости. На самом же деле роль устойчивости в дискретном случае ничуть не меньше, чем в непрерывном. Кроме того, устойчивость вовсе не вытекает из сходимости траекторий. Вот соответствующий контрпример.

Пусть $X$ — множество точек единичной окружности, а расстояние между точками $\rho(x, y)$ — обычная длина наименьшей соединяющей их дуги. Таким образом, $(X, \rho)$ — компакт. Положение точки однозначно задается углом $\varphi \in [0, 2\pi)$. Рассмотрим в $X$ непрерывное движение, определяемое дифференциальным уравнением

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\sin\frac{\varphi}{2},$$

и пусть $U_t$ — соответствующий оператор сдвига, т. е. $U_t\varphi(0) = \varphi(t)$. Определим теперь оператор $F$ как сдвиг в $X$ за единицу времени. Очевидно, точка $x^* \in X$, соответствующая $\varphi = 0$, — неподвижная точка оператора $F$, который непрерывен, и $F^k(x) \to x^*$ для любого $x \in X$. Но здесь также очевидно, что $x^*$ — неустойчивая точка.

Приведенный пример показывает заодно, что и в теории устойчивости движения устойчивость не вытекает из сходимости траекторий к положению равновесия. Аналогичный по духу пример динамической системы можно привести и для случая обычной топологии на плоскости. Так, очевидно, что динамическая система, поле скоростей которой имеет вид, изображенный на рис. 2, неустойчива, хотя все траектории сходятся к положению равновесия $x^*$. Определяя снова оператор $F$ как сдвиг за единицу времени, получаем соответствующий пример для итерационного процесса $x^{k+1} = F(x^k)$.

Глава вторая

# НЕПОДВИЖНЫЕ ТОЧКИ

Мы приступаем к изложению теорем существования решений уравнения $G(x)=0$ или $x=F(x)$. Под $G(x)$ можно подразумевать набор функций-индикаторов, а под $F(x)$ — оператор межэлементных связей, но не обязательно. Приводимые далее результаты имеют весьма широкий круг приложений, и по этой причине здесь лучше говорить о задачах статики сложных систем, чем только о равновесии.

Основное внимание будет уделено топологическим методам, которые, формально говоря, в системных исследованиях применяются сравнительно давно, однако в большинстве случаев это, как правило, ограничивается использованием теоремы Брауэра. На самом же деле теорема Брауэра — лишь маленький фрагмент общей идеологии, богатой другими полезными фактами. Последующее изложение базируется на понятии вращения векторного поля (эквивалентном понятию степени отображения). Относящиеся сюда результаты являются сравнительно простым приложением теории гомологий и обычно рассматриваются в литературе по алгебраической топологии в других терминах.

Естественно, что здесь было бы неуместно начинать с азов. В то же время не хотелось бы предполагать у читателя предварительное знакомство с предметом *. По этой причине изложение построено так, что для понимания последующего текста нужна лишь готовность воспринять на веру несколько фундаментальных фактов, после чего все остальные результаты становятся совершенно прозрачными.

## § 1. Вращение векторного поля

Пусть $\Omega$ — ограниченная область** конечномерного пространства $R^n$, $\Gamma$ — ее граница ($\Omega \cup \Gamma = \bar{\Omega}$). Пусть имеется некоторое непрерывное отображение $G: R^n \to R^n$ (для дальнейшего существенно лишь, чтобы оператор $G$ был определен на $\bar{\Omega}$). Каждому $x \in R^n$

* Некоторые исходные топологические идеи схематично описаны в Дополнении I.

** Областью называется открытое связное множество.

(или $x \in \bar{\Omega}$) $G$ сопоставляет вектор $G(x) \in R^n$; $G(x)$ будем называть также *векторным полем*. Точку $x$, в которой $G(x)=0$, назовем *нулем векторного поля, или неподвижной точкой поля* (но не отображения). Наконец, поле $G(x)$ назовем *невырожденным* на $\Gamma$, если оно на $\Gamma$ не имеет нулей, т. е. $G(x) \neq 0$ для любого $x \in \Gamma$. Далее рассматриваются лишь непрерывные векторные поля, невырожденные на границе рассматриваемой области $\Omega$.

Оказывается, существует целочисленная характеристика $\gamma(G, \Gamma) \in \{\ldots, -1, 0, 1, \ldots\}$ поля $G(x)$ по отношению к границе $\Gamma$, инвариантная относительно малых деформаций поля $G(x)$, которая называется вращением векторного поля $G(x)$ на $\Gamma$.

Под малой деформацией поля $G(x)$ можно понимать поле $\tilde{G}(x)$ такое, что

$$\forall x \in \Gamma : \| G(x) - \tilde{G}(x) \| \leqslant \varepsilon,$$

где $\varepsilon$ — положительное число, которое может зависеть от $G$ и $\Gamma$.

Одной из причин, по которой изучение вращений векторных полей представляет интерес, является справедливость следующего фундаментального факта:

*если $\gamma(G, \Gamma) \neq 0$, то существует точка $x \in \Omega$, в которой $G(x) = 0$, т. е. на $\Omega$ существует нуль векторного поля $G(x)$.*

Следовательно, всякая теорема об отличии от нуля вращения векторного поля $G(x)$ может расцениваться как принцип существования решения уравнения $G(x) = 0$.

В случае $\gamma(G, \Gamma) = 0$ ничего определенного (о существовании нуля) сказать нельзя, но имеет место следующий результат:

*пусть поле $G(x)$ задано лишь на $\Gamma$ и $\gamma(G, \Gamma) = 0$; тогда поле $G(x)$ может быть непрерывно продолжено на всю область $\Omega$ без неподвижных точек (без нулей).*

Для дальнейшего нужно знать вращения некоторых стандартных векторных полей. В качестве стандартных здесь будут использоваться в основном совсем простые поля $E(x) = x$ и $-E(x)$. Если $0 \in \Omega$, то известно, что $\gamma(E, \Gamma) = 1$, $\gamma(-E, \Gamma) = (-1)^n$, где $n$ — размерность пространства.

Полезно также знать, чему равно вращение более общего линейного поля. Пусть $A$ — линейное невырожденное преобразование ($\det A \neq 0$) и $0 \in \Omega$; тогда $\gamma(A, \Gamma) = 1$, если $\det A > 0$, и $\gamma(A, \Gamma) = -1$, если $\det A < 0$. Если же $0 \notin \Omega$, то в обоих случаях $\gamma(A, \Gamma) = 0$.

## § 2. Гомотопные поля и вычисление вращений

Поля $G_1(x)$ и $G_2(x)$ называются *гомотопными*, если существует непрерывная по совокупности переменных функция $H(x, \tau)$ ($x \in \Gamma$, $\tau \in [0, 1]$)

$$H : \Gamma \times [0, 1] \to R^n$$

такая, что при любом $\tau \in [0, 1]$ поле $H(x, \tau)$ невырожденно на $\Gamma$ и

$$H(x; 0) = G_1(x), \quad H(x, 1) = G_2(x) \quad (x \in \Gamma). \tag{2.1}$$

Функцию $H(x, \tau)$ будем называть *гомотопическим мостом.* Иногда вместо $H(x, \tau)$ пишут $H_\tau(x)$, называя семейство отображений $H_\tau(x)$ *гомотопией, которая связывает векторные поля* $G_1(x)$ *и* $G_2(x)$.

Теорема 2.1. *Гомотопные поля имеют одинаковые вращения.* ▲

Эта теорема — элементарное следствие того, что вращение не меняется при достаточно малых деформациях поля. Гомотопический мост $H(x, \tau)$ в силу непрерывности $H$ по совокупности переменных и компактности сегмента $[0, 1]$ дает возможность представить переход от поля $G_1(x)$ к полю $G_2(x)$ в виде конечной последовательности малых деформаций. Несмотря на элементарный характер приведенного утверждения, оно играет чрезвычайно важную роль, поскольку является одним из основных инструментов для вычисления вращений векторных полей. Теорема 2.1 позволяет переходить с помощью гомотопии от изучаемых полей к более простым, часто стандартным, вращение которых известно.

Иногда задача отыскания гомотопии, связывающей те или иные поля, бывает довольно сложной, но часто оказываются эффективными некоторые стандартные способы построения гомотопических мостов. Один из таких способов (состоящий в построении линейной гомотопии) приводит к следующему факту, богатому полезными следствиями.

Теорема 2.2. *Если в любой точке* $x \in \Gamma$ *векторы* $G_1(x)$ *и* $G_2(x)$ *направлены непротивоположно, то поля* $G_1(x)$ *и* $G_2(x)$ *гомотопны и, следовательно,* $\gamma(G_1, \Gamma) = \gamma(G_2, \Gamma)$.

Действительно, функция $H(x, \tau) = (1 - \tau) G_1(x) + \tau G_2(x)$ — гомотопический мост. Свойство (2.1) и непрерывность очевидны, невырожденность $H(x, \tau)$ на $\Gamma$ при любом $\tau \in [0, 1]$ вытекает из невырожденности полей $G_1(x)$ и $G_2(x)$ и отсутствия (по предположению теоремы) точки $x \in \Gamma$, в которой

$$G_1(x) = -\frac{\tau}{1 - \tau} G_2(x), \quad \tau \in (0, 1). \ ▲$$

Если теперь в качестве $G_1(x)$ выбирать некоторые поля с известным вращением, отличным от нуля, а условие непротивоположной направленности полей формулировать в том или ином виде, удобном для приложений, то можно получить целую серию принципов существования.

## § 3. Элементарные следствия

Лемма 3.1. *Пусть $B$ — открытый шар с центром в нуле и непрерывный оператор $F$ отображает $\bar{B}$ в себя так, что $F(\bar{B}) \subset B$. Тогда вращение поля $x - F(x)$ на границе шара равно 1 и, следовательно, существует точка $x^* \in B$ такая, что $x^* = F(x^*)$.*

Легко видеть, что в указанных условиях ни при каком $x$, принадлежащем границе шара, векторы $x$ и $x - F(x)$ не могут быть направлены противоположно. Поэтому поле $x - F(x)$ гомотопно полю $E(x) = x$, вращение которого равно 1. ▲ Из леммы 3.1 сразу же вытекает широкоизвестный результат.

Теорема 3.1 (Брауэр). *Пусть непрерывный оператор $F$ отображает в себя некоторый замкнутый шар $\bar{B}$; тогда у $F$ существует неподвижная точка $x^* \in \bar{B}$.*

Без ограничения общности можно считать центр шара расположенным в нуле (этого всегда можно добиться заменой системы координат, что не нарушает условий теоремы). Тогда в предположении противного получается противоречие с утверждением леммы 3. 1. ▲

Вернемся снова к рассмотрению произвольной ограниченной области $\Omega$.

Теорема 3.2. *Пусть $0 \in \Omega$ и выполняется одно из условий**

$$\forall x \in \Gamma : (G(x), x) \geqslant 0 \tag{3.1}$$

*или*

$$\forall x \in \Gamma : (G(x), x) \leqslant 0; \tag{3.2}$$

*тогда существует точка $x^* \in \bar{\Omega}$ такая, что $G(x^*) = 0$.*

Если предположить противное, то поле $G(x)$ невырожденно на $\Gamma$ и при условии (3.1) гомотопно полю $E(x)$, а при условии (3.2) — полю $-E(x)$. В том и другом случае $\gamma(G, \Gamma) \neq 0$, что приводит к противоречию. ▲

Для удобства приведем также эквивалентную формулировку теоремы 3.2.

Теорема 3.3. *Пусть $0 \in \Omega$ и выполняется одно из условий:*

$$\forall x \in \Gamma : (F(x), x) \geqslant (x, x)$$

*или*

$$\forall x \in \Gamma : (F(x), x) \leqslant (x, x);$$

*тогда оператор $F$ на $\bar{\Omega}$ имеет неподвижную точку.* ▲

Теорема 3.2, очевидно, может быть обобщена следующим образом.

Теорема 3.4. *Пусть $0 \in \Omega$, $A$ — невырожденная матрица и*

$$\forall x \in \Gamma : (G(x), Ax) \geqslant 0; \tag{3.3}$$

*тогда уравнение $G(x) = 0$ на $\Omega$ имеет решение.* ▲

---

* Напомним, что в этой главе рассматриваются только непрерывные операторы, и это не всегда оговаривается.

С тем же успехом в (3.3) $Ax$ можно заменить на любое поле $\Phi(x)$, которое невырожденно на $\Gamma$ и имеет отличное от нуля вращение.

Условия «непротивоположной направленности» (3.1)—(3.3) на самом деле работают с большим запасом. Более гибкими являются условия, формулируемые в следующей теореме.

Теорема 3.5. *Пусть* $0 \in \Omega$, $G(x) = \{g_1(x), \ldots, g_n(x)\}$ *и выполняется одно из следующих условий*:

а) *для любого* $x \in \Gamma$ *найдется номер* $i$ *такой, что* $x_i g_i(x) > 0$;

б) *для любого* $x \in \Gamma$ *найдется номер* $i$ *такой, что* $x_i g_i(x) < 0$;

*тогда у поля* $G(x)$ *на* $\Omega$ *существует нулевой вектор.*

*В первом случае* $G(x)$ *будет гомотопно полю* $E(x)$, *во втором — полю* $-E(x)$. ▲

Обратим внимание, что в том случае, когда речь идет о решении уравнения $G(x) = 0$, исходная нумерация компонент оператора $G$ может быть произвольно изменена. Это меняет поле $G(x)$, но не меняет существа задачи. Указанное соображение иногда облегчает процесс исследования.

Приведем еще один результат, базирующийся на утверждении теоремы 2.2.

Теорема 3.6. *Пусть область* $\Omega$ *выпукла и ни одна траектория дифференциального уравнения*

$$\dot{x} = \Phi(x)$$

*не выходит из* $\overline{\Omega}$; *тогда существует положение равновесия* $x^* \in \overline{\Omega}$ $(\Phi(x^*) = 0)$.

Без ограничения общности можно считать $0 \in \Omega$. В этом случае, очевидно, $\Phi(x)$ гомотопно полю $-E(x)$. ▲

## § 4. Интуитивно геометрическая точка зрения

В основе приведенных выше теорем лежит одна довольно простая идея. С геометрической точки зрения она весьма наглядна, и на этом стоит остановиться. Рассуждая, мы будем апеллировать к геометрической интуиции, не обращая внимания на различные детали и тонкости. Заодно мы получим возможность грубо пояснить, что же такое вращение векторного поля и каково происхождение его основных свойств.

Пусть нас интересует вопрос о существовании решения $x \in \Omega$ уравнения $F(x) = 0$. Другими словами, мы интересуемся тем, принадлежит ли 0 образу $\Omega$ или нет.

Обозначим через $F(\Gamma)$ поверхность, являющуюся образом границы $\Gamma$ области $\Omega$. Интуиция подсказывает, что образ $\Omega$, т. е. $F(\Omega)$, заполняет область, находящуюся внутри $F(\Gamma)$, и если 0 также лежит внутри $F(\Gamma)$, то $0 \in F(\Omega)$ и задача решена. На самом деле все не так просто. Главная трудность заключается в определении понятия «внутри». По крайней мере интуитивно ясным выглядит тот случай, когда $\Gamma$ и $F(\Gamma)$ представляют собой замкнутые поверхности без самопересечений (что-то вроде искривленных сфер). Этот случай пока и обсудим.

Если бы мы могли «видеть» геометрическую картинку: точку 0 и поверхность $F(\Gamma)$, то [в случае, когда поверхность $F(\Gamma)$ не слишком вычурна] задачу можно было бы решить «визуально». Но даже в двумерном случае, когда действительно имеется возможность нарисовать картинку на плоскости, это не будет удовлетворительным выходом из положения по многим очевидным причинам. На самом деле хотелось бы располагать регулярным методом, позволяющим судить о расположении нуля внутри $F(\Gamma)$ на основе некой формализованной процедуры, которая была бы достаточно удобной в обращении. Если мы (по необходимости) соглашаемся, что такая процедура не может использовать «впечатлений» исследователя о расположении нуля внутри или снаружи $F(\Gamma)$, то приходится формализовать понятие «внутри». С интуитивной точки зрения приемлемым кажется следующий способ. Во-первых, договоримся, что центр 0 сферы

$$S=\{x \mid \|x\|=1\}$$

расположен внутри $S$. А теперь скажем, что 0 лежит внутри замкнутой поверхности $F(\Gamma)$, если мы можем, непрерывно деформируя $F(\Gamma)$, совместить ее с $S$ и при этом «не задеваем» точку 0.

Посмотрим теперь, как приведенные мысленные геометрические манипуляции можно реально использовать. Пусть для простоты область $\Omega$ представляет собой открытый единичный шар $B$ с центром в нуле, и значит $\Gamma=S$. В процессе указанной выше непрерывной деформации каждая точка $F(x)\in F(S)$ описывает некоторую траекторию, заканчивающуюся на $S$. В случае, когда удается организовать деформацию так, что концами каждой траектории является пара точек $x\in S$ и $F(x)\in F(S)$, поле $F(x)$ мы называли гомотопным (на $S$) тождественному $E(x)\equiv x$. Например, когда при любом $x\in S$ векторы $x$ и $F(x)$ не направлены противоположно, такой деформацией может служить

$$\tau x+(1-\tau)F(x) \quad (\tau\in[0,1],\ x\in S). \tag{4.1}$$

Непротивоположная направленность $x$ и $F(x)$ здесь нужна, чтобы при деформации (4.1) «не задеть» точку 0.

Может встретиться также иной тип деформаций: концы каждой траектории (см. выше) представляют собой пару точек $-x\in S$ и $F(x)\in F(S)$. При нечетной размерности пространства это соответствует случаю, когда сфера $S$ отображением $F$ как бы выворачивается наизнанку. В этом случае поле $F(x)$ мы называли гомотопным полю $-E(x)$ и снова имели возможность гарантировать существование решения уравнения $F(x)=0$. Понятно, что природа ситуации не меняется, если $F(x)$ на $S$ деформируется в $Ax$ или $Ax/\|Ax\|$, где $A$ — любое невырожденное линейное преобразование. Все эти варианты соответствуют случаю, когда вращение векторного поля по модулю равно 1.

С описанной точки зрения теоремы предыдущего параграфа становятся геометрически вполне очевидными. Нетрудно понять, что если бы речь шла только об этих теоремах, то можно было бы ограничиться понятием гомотопности полю $E(x)$, а понятие вращения векторного поля вообще не вводить.

Остановимся, наконец, на общей ситуации. Понятно, что поверхность $F(\Gamma)$ может быть довольно сложной, и, будучи деформирована на $S$, а потом растянута по $S$ (разглаживанием складок), она может «окутывать» $S$ несколько раз (а не один раз, как в рассмотренных выше случаях). Число этих «окутываний» и есть абсолютное значение вращения векторного поля $F(x)$. Знак вращения определяется сохранением или изменением ориентации (выворачиванием наизнанку).

Происхождение термина «вращение векторного поля» связано с одной его интерпретацией в двумерном случае. В $R^2$ вращение $F(x)$ на контуре $\Gamma$ можно считать равным числу полных оборотов (со знаком плюс или минус), совершаемых вектором $F(x)$, когда точка $(x)$ обходит $\Gamma$ один раз. Имея перед собой бумагу и карандаш, легко уяснить на примерах, что такое определение вращения согласуется с определением через «окутывания».

## § 5. Еще о вращении векторных полей

Пусть $S$ обозначает границу шара $B$ с центром в нуле. Поле $G(x)$ называется *нечетным*, если в любых диаметрально противоположных точках сферы $S$ векторы поля направлены противоположно. Справедлив следующий результат.

Теорема 5.1. *Вращение нечетного поля $G(x)$ на $S$ нечетно.* ▲

Казалось бы, теорема 5.1 относится к весьма частному случаю нечетных векторных полей, но она позволяет получить результат существенно более общего характера (который иногда называют теоремой Л. А. Люстерника — Л. Г. Шнирельмана — К. Борсука).

Теорема 5.2. *Пусть поле $G(x)$ невырожденно на $S$ и*

$$\forall x \in S : \frac{G(x)}{\|G(x)\|} \neq \frac{G(-x)}{\|G(-x)\|},$$

*т. е. в симметричных относительно центра точках векторы поля направлены неодинаково. Тогда вращение поля $G(x)$ нечетно и, следовательно, существует точка $x \in B$, в которой $G(x)=0$.*

Действительно, в указанных предположениях поле $G(x)$ гомотопно нечетному полю $G(x)-G(-x)$. Гомотопическим мостом может служить

$$H(x, \tau) = G(x) - \tau G(-x).$$

Далее остается сослаться на теорему 5.1. ▲

Остановимся еще на одном простом, но полезном утверждении.

Теорема 5.3 (Руше). *Пусть поле* $\Phi(x)$ *невырожденно на границе* $\Gamma$ *области* $\Omega$ *и*

$$\forall x \in \Gamma: \|F(x)\| < \|\Phi(x)\|; \tag{5.1}$$

*тогда поле* $G(x) = \Phi(x) + F(x)$ *гомотопно полю* $\Phi(x)$.

Поля связывает гомотопия

$$H(x, \tau) = \Phi(x) + \tau F(x). \ ▲$$

Стандартный путь практического применения теоремы Руше такой же, как и способ использования ее аналога для доказательства основной теоремы алгебры (о корнях многочлена). У исследуемого поля $G(x)$ выделяется «главная часть» $\Phi(x)$, порядок роста нормы которой на бесконечности превосходит порядок роста $\|G(x) - \Phi(x)\|$, тогда на сферах достаточно большого радиуса будет справедлива оценка (5.1), и задача сводится к вычислению вращения поля $\Phi(x)$ [вместо $G(x)$], что часто оказывается проще.

Тот факт, что в описанной процедуре предлагается выбирать сферы достаточно больших радиусов, не должен вызывать недоумение. Дело в том, что область $\Omega$ обычно не определяется существом постановки задачи, и ее выбор находится во власти исследователя.

С помощью теоремы Руше исследуемые поля часто удобно сравнивать с линейными.

Теорема 5.4. *Пусть* $0 \in \Omega$ *и для некоторого линейного оператора* $A$ *и некоторого фиксированного* $\lambda$

$$\forall x \in \Gamma: \|F(x) - \lambda Ax\| < \|x - \lambda Ax\|;$$

*тогда уравнение* $x = F(x)$ *в* $\overline{\Omega}$ *имеет хотя бы одно решение.*

Требуемое заключение легко получается с помощью теоремы 5.3. ▲

## § 6. Теорема об алгебраическом числе нулей

Величина вращения векторного поля пока для нас существенной роли не играла, было важно лишь ее отличие от нуля. Установление взаимоотношения между вращением поля на границе и числом нулей поля внутри области позволяет получать более тонкие следствия. Займемся описанием такой взаимосвязи.

Если в достаточно малой окрестности нуля $x_i$ поля $G(x)$ не содержится других нулей, то $x_i$ назовем *изолированным нулем* поля

$G(\boldsymbol{x})$. Вращение поля $G(\boldsymbol{x})$ на сферах достаточно малого радиуса $r$ с центром в $\boldsymbol{x}_i$ называется *индексом нуля* $\boldsymbol{x}_i$ и обозначается $\gamma(G, \boldsymbol{x}_i)$. Конечно, для корректности такого определения нужно, чтобы величина вращения не зависела от радиуса $r$ (если $r$ достаточно мал), что в действительности имеет место. Поясним этот факт на простом частном примере. Пусть $G(\boldsymbol{x})$ дифференцируемо в $\boldsymbol{x}_i$ и $G'_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}_i)$ обозначает производную Фреше (матрицу Якоби), которую будем предполагать невырожденной. Тогда в достаточно малой окрестности точки $\boldsymbol{x}_i$ поле $G(\boldsymbol{x})$ сколь угодно точно приближается линейным полем

$$G'_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}_i)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_i),$$

и $\gamma(G, \boldsymbol{x}_i)$ равно или $+1$, или $-1$ в зависимости от знака $\det G'_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}_i)$ (см. § 1).

Отметим, наконец, что сумма индексов нулей называется алгебраическим числом нулей.

Теорема 6.1. *Пусть поле $G(\boldsymbol{x})$ невырожденно на $\Gamma$ и имеет в $\Omega$ лишь изолированные нули; тогда алгебраическое число нулей поля $G(\boldsymbol{x})$ на $\Omega$ равно вращению поля $G(\boldsymbol{x})$ на $\Gamma$, т. е.*

$$\sum_{\boldsymbol{x}_i\in\Omega} \gamma(G, \boldsymbol{x}_i)=\gamma(G, \Gamma). \blacktriangle \tag{6.1}$$

Теорема 6.1 зачастую помогает установить единственность решения того или иного уравнения. Приведем простую иллюстрацию.

Пусть $\gamma(G, \Gamma)=1$ и $\forall\, \boldsymbol{x}\in\Omega: \det G'_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x})>0$. Поскольку якобиан преобразования $G$ отличен от нуля в любой точке $\boldsymbol{x}\in\Omega$, отображение $G$ локально обратимо при любом $\boldsymbol{x}\in\Omega$, и поэтому поле $G(\boldsymbol{x})$ может иметь лишь изолированные нули. С другой стороны, в силу $\det G'_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x})>0$ любой нуль $\boldsymbol{x}_i$ поля $G(\boldsymbol{x})$ имеет индекс $\gamma(G, \boldsymbol{x}_i)=1$. Но тогда из (6.1) и условия $\gamma(G, \boldsymbol{x})=1$ вытекает, что поле $G(\boldsymbol{x})$ на $\Omega$ имеет единственный нуль.

В § 3, в частности, было показано, что вращение поля $\boldsymbol{x}-F(\boldsymbol{x})$ в условиях теоремы Брауэра равно 1. Учитывая изложенное выше, приходим к утверждению.

Теорема 6.2. *Пусть оператор $F$ отображает внутрь себя некоторый замкнутый шар $\overline{B}$ и*

$$\forall\, \boldsymbol{x}\in B: \det(E-F'_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}))>0;$$

*тогда $F$ имеет в $B$ единственную неподвижную точку.* $\blacktriangle$

К полезным следствиям приводит также представление вращения в виде суммы вращений на границах подобластей. Пусть $\Omega_1, \ldots, \Omega_k$ — непересекающиеся подобласти области $\Omega$ и $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_k$ — их границы, причем $\bigcup_j \overline{\Omega}_j=\overline{\Omega}$.

Теорема 6.3. *Пусть поле $G(x)$ невырожденно на всех* $\Gamma, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_k$; тогда

$$\gamma(G, \Gamma) = \sum_{j=1}^{k} \gamma(G, \Gamma_j). \quad \blacktriangle \tag{6.2}$$

В качестве одного из возможных приложений теоремы 6.3 приведем простой пример. Пусть шары $B_1$ и $B_2$ не пересекаются и оба содержатся в шаре $\bar{B}_3$. Пусть каждый шар $\bar{B}_i$ переводится оператором $F$ строго внутрь себя. В этом случае на основании теоремы Брауэра можно утверждать, что у $F$ в $B_3$ есть по крайней мере две неподвижные точки. Из теоремы 6.3 вытекает, что число неподвижных точек $F$ в $B_3$ не менее трех.

## § 7. Некоторые дополнения

Произведение вращений. Иногда изучаемый оператор естественным образом представляется в виде композиции отображений. В этих случаях могут оказаться полезными следующие результаты.

Теорема 7.1. *Пусть $x=0$ — изолированный нуль поля $G_1(x)$, а $x_0$ — изолированный нуль поля $G_2(x)$; тогда $x_0$ — изолированный нуль поля $G_1(G_2(x))$, причем*

$$\gamma(G_1G_2, x_0) = \gamma(G_1, 0)\,\gamma(G_2, x_0). \quad \blacktriangle$$

Теорема 7.2. *Пусть векторное поле $G_1(x)$ имеет в $R^n$ единственный нуль $x=0$, а поле $G_2(x)$ невырожденно на $\Gamma$; тогда*

$$\gamma(G_1G_2, \Gamma) = \gamma(G_2, \Gamma)\,\gamma(G_1, 0). \quad \blacktriangle$$

Если в теореме 7.2 в качестве $G_1(x)$ возьмем поле $-E(x)$, то придем к выводу, что для любого невырожденного на $\Gamma$ поля справедливо соотношение

$$\gamma(-G, \Gamma) = (-1)^n \gamma(G, \Gamma).$$

Существование собственных векторов. Понятие вращения векторного поля оказывается удобно применять также при изучении вопроса о существовании у того или иного оператора собственных векторов, т. е. о существовании решения уравнения $F(x) = \lambda x$ при некотором $\lambda \in (-\infty, \infty)$. Приведем несколько результатов.

Теорема 7.3 (о еже). *Пусть $R^n$ — нечетномерное пространство, $0 \in \Omega$ и поле $F(x)$ невырожденно на $\Gamma$; тогда найдется $x \in \Gamma$ такой, что векторы $x$ и $F(x)$ будут коллинеарны, т. е. $F(x) = \lambda x$ при некотором $\lambda \neq 0$.*

Пусть $\gamma(F, \Gamma) \neq 1$. Тогда поле $F(x)$ не гомотопно полю $E(x)$, и, следовательно, функция $\tau F(x) + (1-\tau)x$ при некоторых $\tau_0 \in$

$\in (0,1)$, $x_0 \in \Gamma$ должна обращаться в нуль, откуда

$$F(x_0) = \frac{\tau_0 - 1}{\tau_0} x_0.$$

Если же $\gamma(F, \Gamma) = 1$, то поле $F(x)$ не гомотопно полю $-E(x)$, и тогда при некоторых $\tau_0 \in (0, 1)$, $x_0 \in \Gamma$ в нуль должна обращаться функция $\tau F(x) - (1-\tau)x$, откуда

$$F(x_0) = \frac{1-\tau_0}{\tau_0} x_0. \ \blacktriangle$$

Теорема 7.3 справедлива лишь в том случае, когда $n$ нечетно. Пусть теперь $n$ произвольно.

Если поля $x$ и $x - F(x)$ при любом $x \in \Gamma$ не направлены противоположно, то они гомотопны и их вращения одинаковы. Поэтому, если их вращения различны, найдется вектор $x_0 \in \Gamma$ такой, что $x_0 - F(x_0) = -\mu x_0 (\mu > 0)$, т. е. $F(x_0) = (1+\mu) x_0$.

Учитывая теперь, что вращение поля $E(x)$ в случае $0 \in \Omega$ равно 1, а в случае $0 \notin \Omega$ равно 0, приходим к следующим результатам.

Теорема 7.4. *Пусть $0 \notin \Omega$ и вращение поля $x - F(x)$ на $\Gamma$ не равно нулю; тогда оператор $F$ на $\Gamma$ имеет собственный вектор, которому соответствует собственное число $\lambda > 1$.* $\blacktriangle$

Теорема 7.5. *Пусть $0 \in \Omega$ и вращение поля $x - F(x)$ на $\Gamma$ не равно 1; тогда оператор $F$ на $\Gamma$ имеет собственный вектор, которому соответствует собственное число $\lambda > 1$.* $\blacktriangle$

Слабо связанные системы. Пусть $\gamma(F, \Gamma) \neq 0$. Тогда можно гарантировать существование нуля не только у векторного поля $F(x)$, но и у поля $F(x) + \varepsilon Q(x)$, если только $\varepsilon$ достаточно мало по модулю. Следовательно, вывод о существовании решения уравнения $F(x) = 0$ в данном случае инвариантен по отношению к малым деформациям $F(x)$ (по отношению к малым ошибкам).

Было бы полезно располагать возможностью аналогичного заключения и в несколько иной ситуации. Иногда изучаемая система представляет собой объединение двух слабо связанных подсистем. В результате мы сталкиваемся с необходимостью изучения системы уравнений вида

$$x = F_1(x) + \varepsilon Q_1(x, y); \qquad y = F_2(y) + \varepsilon Q_2(x, y), \tag{7.1}$$

где $x, y \in R^n$, а $\varepsilon$ — некоторый малый параметр.

В подобных случаях исследование удобнее всего начинать с раздельного изучения подсистем. Предположим, что мы установили существование неподвижных точек у обоих операторов $F_1$ и $F_2$. Закономерно возникает вопрос: при каких дополнительных предположениях можно гарантировать существование решения у системы уравнений (7.1)?

Теорема 7.6. *Пусть операторы $F_1, F_2, Q_1, Q_2$ непрерывны, а векторные поля $\Phi_1(x)=x-F_1(x)$ и $\Phi_2(x)=x-F_2(x)$ невырожденны на некоторой сфере $S^{n-1}$ и их вращения отличны от нуля. Тогда найдется такое $\varepsilon_0>0$, что при всех $\varepsilon\in[-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$ система (7.1) имеет по крайней мере одно решение.*

Запишем (7.1) в виде $(x, y)=F_\varepsilon(x, y)$, где оператор $F_\varepsilon$ действует в $R^{2n}$, а систему $x=F_1(x)$, $y=F_2(y)$ — в виде $(x, y)=F(x, y)$. Пусть $S^{2n-1}$ обозначает сферу, являющуюся границей шара $B^{2n}$ (границей $B^n$ служит сфера $S^{n-1}$, фигурирующая в условии теоремы). Рассмотрим теперь в $R^{2n}$ семейство векторных полей

$$H_\tau(x, y)=\{x-F_1(x)-\varepsilon\tau Q_1(x, y),\ y-F_2(y)-\varepsilon\tau Q_2(x, y)\}. \qquad (7.2)$$

Очевидно, в силу предположений теоремы найдутся такие $\alpha>0$ и $\beta>0$, что

$$\|x-F_1(x)\|>\alpha, \qquad \|y-F_2(y)\|>\alpha \quad (x, y\in S^{n-1});$$

$$\|Q_1(x, y)\|\leqslant\beta, \qquad \|Q_2(x, y)\|\leqslant\beta \quad ((x, y)\in S^{2n-1}).$$

Тогда при $\varepsilon\leqslant\varepsilon_0=\alpha/\beta$ поле (7.2) невырожденно на $S^{2n-1}$ при любом $\tau\in[0, 1]$. Следовательно, (7.2) — гомотопия, которая связывает поля $F_\varepsilon(x, y)$ и $F(x, y)$. Но, как можно показать [32],

$$\gamma(F, S^{2n-1})=\gamma(F_1, S^{n-1})\,\gamma(F_2, S^{n-1});$$

поэтому вращение поля $F_\varepsilon(x, y)$ на $S^{2n-1}$ отлично от нуля. ▲

Заметим, что в процессе доказательства мы получили оценку величины $\varepsilon_0$.

Принцип неподвижной точки Браудера. Число различных результатов по неподвижным точкам весьма велико. На многих из них мы специально не останавливаемся, пытаясь придерживаться основной линии. Однако здесь стоит упомянуть один интересный принцип Ф. Е. Браудера, тем более что, как выяснилось впоследствии [6], он может быть получен на основе изучения вращения векторного поля.

Теорема 7.7. *Пусть $\Omega_1\subset R^n$ — открытое выпуклое множество, а $\overline{\Omega}_0\subset\Omega_1$ — замкнутое ограниченное выпуклое множество. Пусть также существует целое положительное $m$ такое, что*

$$\forall k\leqslant m: F^k(\Omega_0)\subset\Omega_1;\ F^m(\Omega_1)\subset\Omega_0.$$

*Тогда оператор $F$ в $\overline{\Omega}_0$ имеет неподвижную точку.* ▲

Иногда более удобной оказывается другая эквивалентная формулировка этого результата.

Теорема 7.8. *Пусть $\Omega\subset R^n$ — ограниченное выпуклое множество и существует целое положительное $p$ такое, что*

$$F^k(\overline{\Omega})\subset\overline{\Omega}, \quad k=p, p+1, \dots, 2p;$$

*тогда $F$ в $\overline{\Omega}$ имеет неподвижную точку.* ▲

В частности, если любая траектория итерационного процесса $x^{k+1}=F(x^k)$, начинающаяся в некоторой ограниченной области $\bar{\Omega}^*$, через определенное время возвращается в $\bar{\Omega}$ и далее там остается (это справедливо для диссипативных систем), то $F$ в $\bar{\Omega}$ имеет неподвижную точку.

В [6] показано, что вращение векторного поля $x-F(x)$ в условиях принципа Браудера равно 1.

Методика доопределения и переопределения оператора. В приложениях довольно часто изучаемый оператор $F$ определен лишь на части пространства $R^n$, например на неотрицательном ортанте $R_+^n$. При этом использование теорем, в которых фигурирует предположение $0\in\Omega$, приводит к необходимости вспомогательных построений. Наиболее простой, но не всегда удобный способ удовлетворения требования $0\in\Omega$ состоит в переносе начала координат в другую точку, т. е. в замене $x'=x+a$.

Рассмотрим иные возможности. Проиллюстрируем сначала на простом примере идею доопределения оператора.

Теорема 7.9. *Пусть* $0\in\Omega$ *и оператор* $F: R_+^n\to R_+^n$ *не имеет на* $\Gamma\cap R_+^n$ *собственных векторов, которым отвечает собственное число* $\lambda>1$; *тогда* $F$ *на множестве* $\bar{\Omega}\cap R_+^n$ *имеет неподвижную точку.*

Доопределим оператор $F$ по правилу: $\tilde{F}(x)=F(|x|)$, где $|x|=\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}\in R_+^n$. Очевидно, такое продолжение $F$ с $R_+^n$ на $R^n$ непрерывно. Далее остается заметить, что (в силу отсутствия на $\Gamma\cap R_+^n$ собственных векторов с $\lambda>1$) или существует $x\in\Gamma\cap R_+^n$ такой, что $F(x)=x$ (и тогда все доказано), или поля $x$ и $x-\tilde{F}(x)$ гомотопны, так как не могут быть противоположно направлены ни в одной точке $x\in\Gamma$ (и тогда тоже все доказано). ▲

На примере утверждения теоремы 7.9 удобно проиллюстрировать и другую идею — идею переопределения оператора. Она часто опирается на следующее элементарное соображение.

Теорема 7.10. *Если оператор* $F$ *преобразует* $R^n$ (*или* $R_+^n$) *в ограниченное множество* $\Omega$, *то* $F$ *в* $\Omega$ *имеет неподвижную точку***.

Действительно, в силу ограниченности $\Omega$ существует ограниченное выпуклое множество $\bar{\Omega}\subset R^n$ (или $\bar{\Omega}\subset R_+^n$), которое оператором $F$ переводится в себя. Далее остается применить теорему Брауэра. ▲

---

* Выпуклость $\bar{\Omega}$ на самом деле можно предполагать [6].

** Еще раз напомним, что все рассматриваемые здесь операторы предполагаются непрерывными.

Пусть теперь выполнены предположения теоремы 7.9 и дополнительно $\bar{\Omega}$ — шар $\bar{\Omega}=\{x \mid \|x\| \leqslant r\}$. Введем в рассмотрение оператор

$$\bar{F}(x)=\begin{cases} F(x), & \text{если } \|x\| \leqslant r; \\ F\left(\frac{r}{\|x\|}x\right), & \text{если } \|x\| \geqslant r. \end{cases}$$

Очевидно, оператор $\bar{F}$ непрерывен и отображает $R^n_+$ в ограниченное множество, поэтому (теорема 7.10) у него существует неподвижная точка $x^* \in R^n_+$. В силу отсутствия у $F$ собственных векторов с нормой $\|x\|=r$ и $\lambda>1$ норма $x^*$ не может быть больше $r$, поэтому $x^*$ — неподвижная точка оператора $F$.

Приведенные рассуждения основаны на схеме, общей для методики переопределения оператора. Множество $\Omega$, на котором определен изучаемый оператор $F$, разбивается на две части: $\Omega_1$ и $\Omega_2$. На $\Omega_2$ значения оператора изменяются специальным образом. Это приводит к оператору $\bar{F}$, который совпадает с $F$ на $\Omega_1$. После этого доказывается, что $\bar{F}$ имеет неподвижную точку $x^* \in \Omega$, а затем устанавливается, что $x^*$ не может принадлежать $\Omega_2$. Много изящных примеров использования этой идеи имеется в [34].

## § 8. Элементы гомотопической топологии

Здесь мы рассмотрим часть изложенных выше результатов с несколько иной точки зрения, геометрически более наглядной. Если ранее отправной точкой нам служило понятие вращения векторного поля и его фундаментальные свойства, то здесь единственной опорой будет теорема Брауэра. Вообще говоря, теорему Брауэра мы вывели из неких утверждений общего характера, справедливость которых теперь хотим установить с ее помощью. Однако замкнутый круг здесь легко может быть разорван — теорема Брауэра сравнительно просто доказывается на основе комбинаторной леммы Шпернера без привлечения понятия вращения векторного поля, или степени отображения. Но дело даже не в этом. В данный момент нас будет интересовать выявление топологической природы некоторых результатов. Теорема же Брауэра для этой цели представляется вполне подходящим инструментом, поскольку она уже завоевала широкую популярность и обрела интуитивную убедительность. Попутно мы обсудим также ряд важных понятий.

З а д а ч а  р а с п р о с т р а н е н и я. Пусть $X$, $Y$ — метрические пространства и $F: X \to Y$ — непрерывное отображение (все рассматриваемые далее отображения считаются непрерывными). Для любого подпространства $A$ пространства $X$ отображение $F$ определяет единственное отображение $G: A \to Y$ такое, что

$G(x) = F(x)$ для любого $x \in A$. Отображение $G$ называется *сужением $F$ на $A$* и обозначается символом $F|_A$. В свою очередь $F$ называется *продолжением (распространением) отображения $G$ на $X$.*

Одна из чрезвычайно важных задач топологии — задача продолжения: можно ли данное отображение $G: A \to Y$ продолжить на все пространство $X$ (конечно, имеется в виду непрерывное продолжение)? С прикладной точки зрения интересен тот случай, когда $X$ представляет собой замкнутый шар $B$ в $R^n$, а $Y$ совпадает с $A$ и является сферой $S$, ограничивающей шар $B$. Известно, например, что *тождественное отображение сферы $S$ на себя не может быть продолжено на весь шар $B$*. Негативный характер этого утверждения не умаляет его ценности. Будучи надлежащим образом переформулировано, оно приводит к позитивному утверждению, а именно к теореме Брауэра. Действительно, предположим, что существует отображение $F: \overline{B} \to \overline{B}$, не имеющее неподвижных точек, т. е. $\forall x \in \overline{B}: F(x) \neq x$. Соединим тогда точки $x$ и $F(x)$ отрезком и продолжим его за точку $x$ до пересечения со сферой $S$ в некоторой точке $R(x)$. Очевидно, отображение $R: \overline{B} \to S$ непрерывно, а его сужение на $S$ — тождественное отображение $S$ на $S$. Таким образом, $R$ представляет собой продолжение на весь шар тождественного отображения сферы на себя, что невозможно.

Гомотопия отображений. Частным случаем задачи продолжения (распространения) является вопрос о гомотопности отображений. Отображения $F_1, F_2: X \to Y$ называются гомотопными, если существует (непрерывное) отображение $H: X \times [0, 1] \to Y$ такое, что

$$H(x, 0) = F_1(x), \qquad H(x, 1) = F_2(x). \tag{8.1}$$

При этом $H$ называется гомотопией от $F_1$ к $F_2$ (или гомотопическим мостом). Легко видеть, что задача построения гомотопии от $F_1$ к $F_2$ равносильна задаче продолжения отображения $H: X \times \{0\} \times \{1\} \to Y$, определяемого соотношениями (8.1), на пространство $X \times [0, 1]$.

Если $F_1$ гомотопно $F_2$, то мы будем писать $F_1 \simeq F_2$. Очевидно, гомотопность представляет собой отношение эквивалентности. Если существует пара отображений $F: X \to Y$, $G: Y \to X$ таких, что $GF \simeq E_X: X \to X$, $FG \simeq E_Y: Y \to Y$, где $E$ — тождественное отображение, то пространства $X$, $Y$ называют *гомотопически эквивалентными и пишут $X \simeq Y$. Пространство, гомотопически эквивалентное точке, называют стягиваемым (по себе)*. Равносильное определение: *пространство $X$ стягиваемо, если оно может быть непрерывно деформировано в точку $x_0 \in X$, т. е. существует непрерывное отображение $\Phi: X \times [0, 1] \to X$ такое, что*

$$\forall x \in X: \Phi(x, 0) = x, \qquad \Phi(x, 1) = x_0. \tag{8.2}$$

*Стягиваемым является, например, любое выпуклое множество.*

Отображение, переводящее все точки $x \in X$ в одну общую точку, называется *постоянным. Если $F$ гомотопно постоянному отображению, то будем говорить, что $F$ гомотопно нулю* (*и писать* $F \simeq 0$).

Заметим наконец, что гомотопность отображений зависит от того, какое выбирается пространство $Y$. Так, например, при определении гомотопии векторных полей мы имели дело с отображениями $G_1 : \Gamma \to R^n$, $G_2 : \Gamma \to R^n$ и требовали дополнительно, чтобы ни при каких $x \in \Gamma$ и $\tau \in [0, 1]$ функция $H(x, \tau)$ не обращалась в нуль. В этом случае можно было бы сказать иначе: векторные поля $G_1(x)$, $G_2(x)$ гомотопны, если отображения $G_1$, $G_2$ гомотопны в $R^n \setminus \{0\}$ (т. е. $G_1$, $G_2$ гомотопны как отображения из $\Gamma$ в $R^n \setminus \{0\}$).

Неформальная схема последующего изложения такова. Оказывается если $F$, отображающее границу $\Gamma$ некоторой области $\Omega$ в $R^n \setminus \{0\}$, не гомотопно нулю, то отсюда, как и в случае отличия от нуля вращения векторного поля $\gamma(F, \Gamma)$, можно сделать вывод о существовании точки $x \in \Omega$, в которой $F(x) = 0$. Дальнейший путь «минимального сопротивления» такой же, как и в теории вращения векторных полей. Устанавливается негомотопность нулю нескольких стандартных отображений, а затем с ними сравниваются изучаемые отображения. При этом возможность изучить ряд стандартных отображений обеспечивается тем фактом, что негомотопность $F$ нулю оказывается равносильной требованию непродолжаемости $F$ на $\overline{\Omega}$. Последняя же задача в ряде случаев легко решается с помощью теоремы Брауэра.

Нужно отметить, что аналоги некоторых предыдущих результатов мы получим при дополнительных ограничениях на область $\Omega$. В рамках описанной элементарной схемы мы не имеем возможности также касаться вопроса о числе решений уравнения $F(x) = 0$. Вообще говоря, с точки зрения гомотопической топологии можно было бы проинтерпретировать и обосновать довольно широкий круг результатов, но это не входит в наши намерения, так как потребовало бы слишком много места (не меньше, чем для определения понятия вращения векторного поля и вывода его основных свойств).

Формальные результаты. Пусть $\Omega$ — ограниченная область в $R^n$ и $\Gamma$ — ее граница, причем $\overline{\Omega}$ стягиваемо. Нас будет интересовать существование $x \in \Omega$, для которого $F(x) = 0$. При этом мы будем предполагать, что $F(x) \neq 0$ для любого $x \in \Gamma$, т. е. сужение $F$ на $\Gamma$ отображает $\Gamma$ в $R^n \setminus \{0\}$. Сужению $F|_\Gamma$ удобно также сопоставлять отображение $\tilde{F} : \Gamma \to S$ ($S$ — единичная сфера), где $\tilde{F}(x) = F(x)/\|F(x)\|$.

Лемма 8.1. *Гомотопность отображений $F_1|_\Gamma$ и $F_2|_\Gamma$ в $R^n \setminus \{0\}$ равносильна гомотопности отображений $\tilde{F}_1$ и $\tilde{F}_2$ в $S$.*

Действительно, пусть $H(x, \tau)$ — гомотопия в $R \setminus \{0\}$ от $F_1|_\Gamma$

к $F_2|_\Gamma$; тогда $H(x,\tau)/\|H(x,\tau)\|$ — гомотопия в $S$ от $\tilde{F}_1$ к $\tilde{F}_2$. Обратно, пусть $H(x,\tau)$ — гомотопия от $\tilde{F}_1$ к $\tilde{F}_2$; тогда

$$[(1-\tau)\|F_1(x)\|+\tau\|F_2(x)\|]\,H(x,\tau)$$

будет гомотопией от $F_1|_\Gamma$ к $F_2|_\Gamma$. ▲

Теорема 8.1. *Пусть $G:\Gamma\to S$ продолжимо на $\overline{\Omega}$; тогда $G$ гомотопно нулю.*

Пусть $\overline{G}:\overline{\Omega}\to S$ — продолжение $G$ на $\overline{\Omega}$, а $\Phi(x,\tau)$ — деформация $\overline{\Omega}$ в точку [см. (8.2)]. Тогда $H(x,\tau)=\overline{G}(\Phi(x,\tau))$ будет гомотопией от $G$ к постоянному отображению. ▲

Теорема 8.2. *Пусть $F|_\Gamma:\Gamma\to R^n\setminus\{0\}$ не гомотопно нулю; тогда существует точка $x\in\Omega$, в которой $F(x)=0$.*

Если бы такой точки не было, то $F(x)/\|F(x)\|$ было бы продолжением $\tilde{F}:\Gamma\to S$ на $\overline{\Omega}$. Но тогда $\tilde{F}$, а значит и $F|_\Gamma$, было бы гомотопно нулю. ▲

Теперь любая теорема о негомотопности нулю будет принципом существования решения уравнения $F(x)=0$. Для сравнения отображений оказывается удобным следующий очевидный факт: если отображения $F_1, F_2:\Gamma\to R^n\setminus\{0\}$ таковы, что

$$\forall x\in\Gamma:\ \frac{F_1(x)}{\|F_1(x)\|}\neq-\frac{F_2(x)}{\|F_2(x)\|}, \tag{8.3}$$

то $F_1$ и $F_2$ гомотопны в $R^n\setminus\{0\}$. Соотношение (8.3) — не что иное, как условие «непротивоположной направленности» (см. § 2).

Покажем теперь негомотопность нулю некоторых стандартных отображений. Для простоты ограничимся тем случаем, когда $\overline{\Omega}$ представляет собой шар единичного радиуса (с центром в нуле). Как и прежде, шар и ограничивающую его сферу будем обозначать соответственно через $B$ и $S$. Далее нам потребуется следующий результат.

Теорема 8.3. *Пусть $G:S\to S$ гомотопно нулю; тогда $G$ продолжимо на весь шар $\overline{B}$.*

Пусть $H(x,\tau)$ — гомотопия от $G$ к постоянному отображению $\varphi:S\to x_0\in S$; тогда

$$\overline{G}(x)=\begin{cases} H\left(\dfrac{x}{\|x\|},\ 1-\|x\|\right), & \text{если}\quad x\neq0;\\ x_0, & \text{если}\quad x=0,\end{cases}$$

— продолжение $G$ на $B$. ▲

Теорема 8.3 представляет собой частный случай утверждения (справедливого в общем случае), обратного по отношению к теореме 8.1.

Теорема 8.4. *Пусть отображение $G:S\to S$ или не имеет на $S$ неподвижных точек* ($\forall x\in S: G(x)\neq x$), *или существует такое $P:S\to S$, что неподвижных точек на $S$ не имеет отображение $PG:S\to S$; тогда $G$ не гомотопно нулю.*

Если неподвижных точек на $S$ не имеет $G:S\to S$, то этому же условию удовлетворяет $EG:S\to S$, где $E:S\to S$ — тождественное преобразование. Поэтому достаточно рассмотреть случай, когда неподвижных точек на $S$ не имеет отображение $PG$. Предположим противное, т. е. что $G$ гомотопно нулю. Тогда (теорема 8.3) существует отображение $\overline{G}:\overline{B}\to S$, являющееся продолжением $G$ на $\overline{B}$. Очевидно, что при этом $P\overline{G}:\overline{B}\to S$ будет продолжением $PG$ на $\overline{B}$. По теореме Брауэра $P\overline{G}$ имеет неподвижную точку, которая в силу $P\overline{G}:\overline{B}\to S$ заведомо принадлежит $S$, т. е. является неподвижной точкой отображения $PG:S\to S$, что невозможно. ▲

Теорема 8.4 в данном контексте занимает центральное место и служит инструментом, позволяющим установить негомотопность нулю ряда стандартных отображений, с которыми затем можно сравнивать изучаемые операторы. Так, из теоремы 8.4 сразу следует, что отображения $E_S:S\to S$ и $-E_S$ не гомотопны нулю. Этот факт наряду с предыдущими результатами позволяет легко установить справедливость всех основных утверждений § 3 (правда, в предположении, что $\overline{\Omega}$ — шар). Для этого достаточно записать те или иные условия гомотопности изучаемого отображения $F$ тождественному отображению $E$ (или $-E$). Покажем, что вместо $E(-E)$ можно с тем же успехом использовать любое невырожденное линейное преобразование $A:R^n\to R^n$.

Теорема 8.5. *Пусть $A:R^n\to R^n$ — невырожденное линейное преобразование; тогда отображение $A|_S:S\to R^n\setminus\{0\}$ (равносильно $\tilde{A}:S\to S$) не гомотопно нулю.*

Напомним, что $\tilde{A}:S\to S$ есть $\tilde{A}x=Ax/\|Ax\|$. Рассмотрим также отображение — $\tilde{A}^Tx=-A^Tx/\|A^Tx\|$. Очевидно, чтобы отображение $-\tilde{A}^T\tilde{A}$ не имело на $S$ неподвижных точек, достаточно, чтобы отображение $-A^TA$ не имело собственных векторов, которым бы соответствовало положительное собственное число. Но последнее действительно верно, поскольку

$$\forall x\neq 0:(-A^TAx,\,x)=-(Ax,\,Ax)<0.$$

Далее остается применить теорему 8.4. ▲

## § 9. К теореме Брауэра

Элементарным образом теорему Брауэра можно обобщить на случай множества $\overline{\Omega}$, гомеоморфного некоторому замкнутому выпуклому ограниченному множеству. Следующий этап обобщения (включающий предыдущий), который рассматривается ниже, также весьма прост, но уже приводит к довольно сильным следствиям.

Говорят, что *множество $\mathfrak{R}$ обладает свойством неподвижной точки, если любое его непрерывное отображение в себя имеет неподвижную точку*. Теорему Брауэра можно сформулировать так: *любой замкнутый шар обладает свойством неподвижной точки.* При попытках усиления этого результата естественно идти по пути изучения тех классов отображений $T:\mathfrak{R}\to\mathfrak{P}$, относительно которых свойство неподвижной точки инвариантно. Таким достаточно общим классом является класс $r$-отображений [11], который существенно шире класса гомеоморфизмов. Отображение $T:X\to Y$ [здесь $Y=T(X)$] называется $r$-отображением, если существует отображение $S:Y\to X$ такое, что $TS=I:Y\to Y$, т. е. $TS$—тождественное отображение $Y$ на $Y$ (напоминаем, что все отображения считаются непрерывными). Другими словами, $T:X\to Y$ есть $r$-отображение, если для него существует правое обратное.

Теорема 9.1. *Если $\mathfrak{R}$ обладает свойством неподвижной точки, а $T:\mathfrak{R}\to\mathfrak{P}$ является $r$-отображением, то $\mathfrak{P}$ также обладает свойством неподвижной точки.*

Доказательство весьма просто. Пусть $F$ — любое непрерывное отображение $\mathfrak{P}$ в себя (а $S$ — правое обратное для $T$). Тогда отображение $G=SFT:\mathfrak{R}\to\mathfrak{R}$, по предположению, имеет неподвижную точку $x^*\in\mathfrak{R}$, т. е. $SFT(x^*)=x^*$. Но тогда

$$TSFT(x^*)=FT(x^*)=T(x^*).$$

Следовательно, $T(x^*)\in\mathfrak{P}$ — неподвижная точка отображения $F$. ▲

Обычно принято указывать более частную формулировку теоремы 9.1 для так называемых *ретракций*: *$r$-отображение $T:X\to Y$ называется ретракцией, если $Y\subset X$ и правое обратное — тождественное отображение $Y$ на $Y$. Множество $Y\subset X$ называется ретрактом $X$, если существует ретракция $X$ на $Y$.* Другими словами, $Y\subset X$ — ретракт $X$, если существует непрерывное отображение $T:X\to Y$, оставляющее все точки $Y$ «на месте». Из теоремы 9.1 следует, что любой ретракт множества, обладающего свойством неподвижной точки, также обладает этим свойством.

Если не принимать во внимание результаты частного характера (см. обзорную статью [83]), то общих утверждений, существенно отличных от «суперпозиции» теоремы 9.1, с теоремой Брауэра, по существу, нет, хотя есть большое разнообразие в разновидностях формулировок [11, 81, 83, 87].

Многие результаты здесь формулируются в терминах групп гомологий. Одно из достаточно общих утверждений следующее: *любой стягиваемый по себе компактный абсолютный окрестно-*

* Замкнутое подмножество $X_0$ пространства $X$ называется окрестностным ретрактом [11] пространства $X$, если $X_0$ — ретракт некоторого открытого подмножества $U\subset X$; например, сфера — окрестностный ретракт $R^n$. Метрический компакт $X_0$ называется компактным АОР, если для всякого гомеоморфизма $h:X_0\to h(X_0)\subset Y$ (где $Y$ также компакт) подмножество $h(X_0)\subset Y$ —

*стный ретракт (АОР)* * *обладает свойством неподвижной точки* **.

Однако любой стягиваемый компактный АОР представляет собой $r$-образ компактного выпуклого подмножества $R^n$ [11]. Таким образом, существо дела здесь не выходит за рамки утверждения, являющегося объединением теоремы 9.1 с теоремой Брауэра.

В практических задачах вряд ли можно ожидать встретиться с множеством, негомеоморфным полиэдру, и тогда для установления свойства неподвижной точки достаточно убедиться в стягиваемости [свойством неподвижной точки обладают, например, «стакан», «расческа», множество (в $R^3$), состоящее из непересекающихся куба и круга и соединяющего их отрезка, и т. д.]. Классу АОР не принадлежат довольно «дикие» множества, которые, если так можно выразиться, имеют «бесконечно тонкую структуру» (например, кривая на плоскости $y=\sin(1/x)$, $x\in\in(0, 1]$ с присоединенным отрезком $x=0$, $-1\leqslant y\leqslant 1$).

Обратим внимание на следующую деталь. Элементарный пример отсутствия неподвижной точки у непрерывного оператора, отображающего в себя компактное множество, дает вращение окружности на угол, меньший $2\pi$. Оказалось, что построить подобный пример на принципиально иной идее весьма трудно. В [83] среди других приводятся примеры компактных стягиваемых множеств в $R^3$, не обладающих свойством неподвижной точки.

Охарактеризуем, наконец, теорему Брауэра в несколько ином плане. Мы получили эту теорему как следствие из более общих положений. Часто бывает, что следствие значительно проигрывает в общности исходному утверждению. Здесь ситуация несколько иная. В случае, например, выпуклой области $\Omega$ теорема Брауэра (как и некоторые другие теоремы § 3) эквивалентна исходным принципам, из которых она получена, и может быть взята за отправную точку для получения тех же результатов (это частично продемонстрировано в § 8). Превосходство в общности понятия вращения векторного поля и сопутствующих ему фундаментальных фактов выявляется в тех утверждениях, где на область $\Omega$ не накладывается никаких ограничений и где речь идет о числе нулей векторного поля (теорема об алгебраическом числе нулей). В этих случаях понятие вращения векторного поля позволяет обнаружить эффекты, которые теоремой Брауэра не улавливаются.

В практических задачах теоремы Брауэра часто бывает достаточно для получения нужного вывода, но ее использование

---

окрестностный ретракт $Y$. В частности, любой полиэдр принадлежит классу АОР. Подробнее о ретрактах см. [11, 77].

** Аналоги подобного рода обобщений имеются и для теоремы Какутани (см. [9, 17, 19] и здесь, Дополнение II).

при этом нередко требует определенной изобретательности. По этой причине представляется полезным располагать набором результатов (типа тех, которые сформулированы в § 3, 5, 7), охватывающих по возможности наибольшее число разнотипных формулировок исходных предположений (возможно, и эквивалентных).

Укажем в заключение один полезный прием использования теоремы Брауэра на примере доказательства теоремы 3.6. Предположим, что выполнены некоторые условия, обеспечивающие единственность решения дифференциального уравнения $\dot{x} = \Phi(x)$, и пусть $U_t$ — оператор сдвига по траекториям $\dot{x} = \Phi(x)$, т. е. $U_t x(0) = x(t)$. По теореме Брауэра при любом фиксированном $t \geqslant 0$ оператор $U_t$ имеет неподвижную точку в $\overline{\Omega}$, так как, по предположению, $U_t \overline{\Omega} \subset \overline{\Omega}$. Возьмем произвольную последовательность $t_k \to 0$, и пусть $x_k$ обозначает одну из неподвижных точек оператора $U_{t_k}$. В силу компактности $\overline{\Omega}$, можно считать $x_k \to x^*$ (в противном случае можно перейти к сходящейся подпоследовательности). Покажем, что $x^*$ — положение равновесия. С одной стороны, $\forall t \geqslant 0 : U_t x_k \to U_t x^*$, с другой —

$$\forall t \geqslant 0 : U_t x_k = U_{\tau_k} x_k \to x^*,$$

где $\tau_k = t - m t_k$, причем целое $m$ выбрано так, что $0 \leqslant \tau_k < t_k$. Таким образом, $\forall t \geqslant 0 : U_t x^* = x^*$, что и требовалось доказать. Аналогичное рассмотрение случая с неединственностью решения $\dot{x} = \Phi(x)$ см. в [54].

## § 10. О принципе сжимающих отображений

До сих пор мы занимались исключительно топологическими методами. Но это не единственный источник теорем существования. Для этих же целей могут эффективно использоваться метрические свойства пространства, в котором действует изучаемый оператор. Одну из таких возможностей предоставляет следующий фундаментальный факт, известный под названием *принципа сжимающих отображений.*

Теорема 10.1. *Пусть оператор $F$, действующий в полном метрическом пространстве $(X, \rho)$, удовлетворяет условию* *

$$\forall x, y \in X : \rho(F(x), F(y)) \leqslant q \rho(x, y), \tag{10.1}$$

*где $q < 1$. Тогда в $X$ существует единственная неподвижная точка оператора $F$.* ▲

Этот принцип широко используется при исследовании дифференциальных, интегральных и других уравнений в функцио-

---

* Если $(X, \rho)$ — компакт, то (10.1) можно заменить более слабым условием $\forall x \neq y : \rho(F(x), F(y)) < \rho(x, y)$.

нальных пространствах. Однако для операторов, действующих в $R^n$, он применяется реже, и это, по-видимому, связано с неудобством непосредственной проверки условия (10.1). Вместе с тем для операторов $F: R^n \to R^n$ существует ряд удобных и наглядных признаков, гарантирующих справедливость (10.1), на которых мы и остановимся. Предварительно напомним некоторые элементарные понятия.

Нормы векторов и матриц. *Нормой вектора* (точки) $\boldsymbol{x} \in R^n$ называется положительное число, обозначаемое $\|\boldsymbol{x}\|$, такое, что

a) $\|\boldsymbol{x}\| = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = 0$;

b) $\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| \leqslant \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$;

c) $\|\alpha \boldsymbol{x}\| = |\alpha| \cdot \|\boldsymbol{x}\|, \quad \alpha \in (-\infty, \infty)$.

Иногда вместо c) используют более слабую аксиому

c′) $\|\alpha \boldsymbol{x}\| = \alpha \|\boldsymbol{x}\|, \quad \alpha > 0$.

В первом случае шар $B = \{\boldsymbol{x} \mid \|\boldsymbol{x}\| \leqslant 1\}$ — выпуклое центрально симметричное тело. Во втором случае центральная симметрия может отсутствовать.

Всякая норма порождает метрику $\rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$.

В конечномерном пространстве все нормы эквивалентны в том смысле, что любая сходящаяся по некоторой норме последовательность сходится и по любой другой норме. Это приятный факт, который позволяет без предосторожностей подбирать наиболее подходящую (удобную) для решаемой задачи норму. Дело в том, что содержательные постановки задач относятся, как правило, к отображениям и множествам, выбор же нормы (метрики) находится во власти исследователя.

Наиболее распространены следующие нормы:

$$\|\boldsymbol{x}\|_m = \max_i |x_i|; \tag{10.2}$$

$$\|\boldsymbol{x}\|_l = \sum_{i=1}^{n} |x_i|; \tag{10.3}$$

$$\|\boldsymbol{x}\|_E = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}. \tag{10.4}$$

Если $\|\boldsymbol{x}\|$ — некоторая заданная норма, а $M$ — невырожденная матрица, то $\|\boldsymbol{x}\|_M = \|M^{-1}x\|$ также норма и называется она *«преобразованной нормой вектора»*. В качестве $M$ часто удобно выбирать диагональную матрицу $M = \operatorname{diag}\{\mu_1, \ldots, \mu_n\}$. В этом случае

$$\|\boldsymbol{x}\|_{mM} = \max_i \frac{1}{\mu_i} |x_i|; \tag{10.5}$$

$$\|x\|_{lM}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\mu_i}|x_i|. \qquad (10.6)$$

*Нормой матрицы* $A$ называется действительное число $\|A\|$ такое, что выполняются условия a) — c), если в них $x$, $y$ заменить на матрицы $A$, $B$.

Поскольку матрицы, по существу, — линейные операторы в $R^n$, было бы естественно как-то согласовать нормы векторов и матриц, чтобы иметь возможность оценивать норму образа $Ax$. С этой целью и вводится понятие согласования норм следующим образом: *норма матрицы* $\|A\|$ называется *согласованной* с нормой вектора $\|x\|$, если для любых $A$ и $x$

$$\|Ax\|\leqslant\|A\|\cdot\|x\| \qquad (10.7)$$

и для любых матриц $A$, $B$ выполняется неравенство

$$\|AB\|\leqslant\|A\|\cdot\|B\|. \qquad (10.8)$$

Поскольку (10.7) действительно часто используется в качестве оценочного неравенства, желателен такой выбор нормы матрицы, чтобы (10.7) давало в определенном смысле наилучшую оценку. Это имеет место, когда норма матрицы подчинена норме вектора. Дадим точное определение.

*Пусть* $\|A\|$ *согласована с* $\|x\|$ *и для любой матрицы* $A$ *найдется вектор* $x\neq0$ (*зависящий от* $A$) *такой, что* $\|Ax\|=\|A\|\cdot\|x\|$. *Тогда норма* $\|A\|$ *называется подчиненной норме* $\|x\|$.

Для любой нормы вектора всегда существует подчиненная норма матрицы, которая определяется следующим конструктивным способом:

$$\|A\|=\max_{\|x\|=1}\|Ax\|=\max_{x\neq0}(\|Ax\|/\|x\|).$$

Для норм (10.2) и (10.3) это соответственно приводит к нормам матриц

$$\|A\|_m=\max_i\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|; \qquad (10.9)$$

$$\|A\|_l=\max_j\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|. \qquad (10.10)$$

При переходе от $\|x\|$ к преобразованной норме $\|x\|_M$ норма матрицы, подчиненная норме $\|x\|_M$, получается так:

$$\|A\|_M=\|M^{-1}AM\|.$$

Это легко видеть из очевидного равенства

$$\|Ax\|_M=\|M^{-1}Ax\|=\|M^{-1}AMM^{-1}x\|.$$

Для норм (10.5) и (10.6) подчиненными нормами матриц будут

$$\|A\|_{mM} = \max_i \frac{1}{\mu_i} \sum_{j=1}^{n} \mu_j |a_{ij}|; \tag{10.11}$$

$$\|A\|_{lM} = \max_j \mu_j \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\mu_i} |a_{ij}|. \tag{10.12}$$

Мы пока ничего не говорили о выборе нормы матрицы в случае исходной евклидовой нормы вектора (10.4). Подчинена (10.4) так называемая спектральная норма матрицы, равная квадратному корню из спектрального радиуса матрицы $A^T A$ (квадратному корню из максимального модуля собственного числа матрицы $A^T A$). В частном случае симметричной матрицы $A$ эта норма совпадает со спектральным радиусом $A$. Спектральная норма не совсем удобна с вычислительной точки зрения, поэтому чаще используется норма

$$\|A\|_{\tilde{E}} = \left( \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2 \right)^{1/2},$$

которая согласована с нормой (10.4), но не подчинена ей.

Достаточные условия. Перейдем к формулировке некоторых достаточных условий, обеспечивающих справедливость неравенства (10.1) при выборе различных норм в $R^n$. Мы будем предполагать, что изучаемый оператор $F(\boldsymbol{x}) = \{f_1(\boldsymbol{x}), \ldots, f_n(\boldsymbol{x})\}$ дифференцируем.

Лемма 10.1. *Для любых* $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in R^n$ *справедливо неравенство*

$$\|F(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) - F(\boldsymbol{x})\| \leqslant \|F'(\boldsymbol{z})\| \cdot \|\boldsymbol{y}\|, \tag{10.13}$$

*где* $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + \theta \boldsymbol{y}$, $0 \leqslant \theta \leqslant 1$.

Действительно, пользуясь теоремой о среднем, получаем *

$$\|F(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) - F(\boldsymbol{x})\| = \int_0^1 \|F'(\boldsymbol{x}+\tau\boldsymbol{y})\,\boldsymbol{y}\|\,d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^1 \|F'(\boldsymbol{x}+\tau\boldsymbol{y})\| \cdot \|\boldsymbol{y}\|\,d\tau = \|F'(\boldsymbol{x}+\theta\boldsymbol{y})\| \cdot \|\boldsymbol{y}\|. \ \blacktriangle$$

Следовательно, если $\|F'(\boldsymbol{z})\| < 1 - \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$ для любого $\boldsymbol{z} \in R^n$, то оператор $F$ — сжимающий (по метрике $\rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$). Так, например, $F$ будет сжимающим по норме $\|\boldsymbol{x}\|_m$, если

$$\forall\, \boldsymbol{x} \in R^n : \max_i \sum_{j=1}^{n} \left| \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j} \right| \leqslant 1 - \varepsilon, \tag{10.14}$$

---

* Предполагается, что норма матрицы согласована с нормой вектора.

и по норме $\|x\|_l$, если

$$\forall x \in R^n : \max_i \sum_{j=1}^{n} \left| \frac{\partial f_j(x)}{\partial x_i} \right| \leqslant 1 - \varepsilon. \qquad (10.15)$$

Остановимся также на случае, когда исходная постановка задачи относится к установлению существования решения уравнения $G(x)=0$, где $G(x)=\{g_1(x), \ldots, g_n(x)\}$. Будем предполагать, что частные производные $\partial g_i/\partial x_i$ знакопостоянны и ограничены. Без ограничения общности можно считать, что $\partial g_i/\partial x_i \leqslant 0$ (в противном случае перед компонентами оператора $G$ можно подходящим образом изменить знаки; это меняет оператор, но задача остается прежней). Перейдем к эквивалентному уравнению $x + \alpha G(x) = x$, $\alpha > 0$. Величину $\alpha$ выберем настолько малой, чтобы $\forall i, x : \alpha \left| \frac{\partial g_i}{\partial x_i} \right| < 1$. Выписывая теперь неравенства (10.14) и (10.15) для оператора $x + \alpha G(x)$, приходим к условиям ($\delta > 0$):

$$\forall x \in R^n : \max_i \left\{ -\left| \frac{\partial g_i(x)}{\partial x_i} \right| + \sum_{j \neq i} \left| \frac{\partial g_i(x)}{\partial x_j} \right| \right\} \leqslant -\delta; \qquad (10.16)$$

$$\forall x \in R^n : \max_j \left\{ -\left| \frac{\partial g_j(x)}{\partial x_j} \right| + \sum_{i \neq j} \left| \frac{\partial g_i(x)}{\partial x_j} \right| \right\} \leqslant -\delta, \qquad (10.17)$$

каждое из которых гарантирует существование и единственность решения уравнения $G(x)=0$ $\left(\text{в предположении знакопостоянства и ограниченности частных производных } \frac{\partial g_i(x)}{\partial x_i}\right)$. Заметим, что в этом случае также существует и единственно решение уравнения $G(x)=c$ при любом $c \in R^n$, что очевидно.

Некоторые обобщения. Принцип сжимающих отображений допускает многочисленные обобщения. Мы остановимся на некоторых из них.

Оператор $F$, действующий в $(X, \rho)$, называется *обобщенным сжатием по М. А. Красносельскому*, если

$$\rho(F(x), F(y)) \leqslant q(\alpha, \beta)\, \rho(x, y), \qquad (10.18)$$

если $\alpha \leqslant \rho(x, y) \leqslant \beta$, причем $q(\alpha, \beta) < 1$ при $\alpha > 0$, $\beta < \infty$.

Оператор $F$ будет обобщенным сжатием, если, например,

$$\rho(F(x), F(y)) \leqslant \rho(x, y) - \varphi(\rho(x, y)),$$

где $\varphi(t)$ — непрерывная положительная при $t > 0$ функция.

Теорема 10.2. *Пусть оператор $F$ преобразует в себя полное метрическое пространство $(X, \rho)$ и является обобщенным сжатием; тогда в $X$ существует единственная неподвижная точка оператора $F$.*

Доказательство. Рассмотрим последовательность $x_{k+1}=F(x_k)$. Числовая последовательность $\alpha_k=\rho(x_k, x_{k-1})$ в силу (10.18) не возрастает и поэтому сходится к некоторому $\alpha^*$. Если $\alpha^*>0$, то при достаточно большом $N$

$$\forall k>0: \alpha_{N+k}\leqslant[q(\alpha^*, \alpha^*+1)]^k (\alpha^*+1),$$

что противоречит предположению $\alpha^*>0$. Следовательно, $\alpha_k\to 0$.

Пусть задано $\varepsilon>0$. Выберем $N$ так, чтобы

$$\alpha_N\leqslant(\varepsilon/2)[1-q(\varepsilon/2, \varepsilon)],$$

и покажем, что $F$ отображает в себя шар $\rho(x, x_N)\leqslant\varepsilon$. Отсюда будет вытекать фундаментальность последовательности $x_k$.

Пусть $\rho(x, x_N)\leqslant\varepsilon/2$, тогда

$$\rho(F(x), x_N)\leqslant\rho(F(x), F(x_N))+\alpha_N\leqslant\rho(x, x_N)+\varepsilon/2\leqslant\varepsilon.$$

Если $\varepsilon/2\leqslant\rho(x, x_N)\leqslant\varepsilon$, то

$$\rho(F(x), x_N)\leqslant\rho(F(x), F(x_N))+\alpha_N\leqslant q(\varepsilon/2, \varepsilon)\varepsilon+\alpha_N\leqslant\varepsilon.$$

Итак, последовательность $x_k$ фундаментальна. Ее предел $x^*$ — неподвижная точка оператора $F$. Единственность $x^*$ следует из (10.18). ▲

Рассмотрим *принцип локального сжатия М. Эдельштейна.* Оператор $F$, действующий в $(X, \rho)$, называется *локально сжимающим*, если для любого $x\in X$ существуют $\varepsilon(x)>0$ и $\lambda(x)\in(0,1)$ такие, что из

$$x, y\in B(x, \varepsilon)=\{z: \rho(x, z)<\varepsilon\}$$

следует $\rho(F(x), F(y))\leqslant\lambda\rho(x, y)$. Если $\varepsilon$ и $\lambda$ не зависят от $x$, то оператор $F$ называется $(\varepsilon, \lambda)$-*равномерно локально сжимающим.*

Если пространство $(X, \rho)$ *выпукло по Менгеру**, то любое $(\varepsilon, \lambda)$-равномерно локальное сжатие является сжимающим оператором (с коэффициентом $\lambda$). В общем случае это неверно. В качестве примера можно привести следующий. На комплексной плоскости с евклидовой метрикой рассматривается множество (рис. 3)

$$X=\{\exp(it): 0\leqslant t\leqslant 3\pi/2\}$$

и оператор $F: X\to X$, действующий по правилу

$$F(\exp(it))=\exp(it/2).$$

Очевидно, $F$ — несжимающий оператор, хотя он равномерно локально сжимающий.

Метрическое пространство назовем $\mu$-цепным, если для любых $x, y\in X$ существует $\mu$-цепь

$$w^{\mu}_{xy}=\{x=x_0, x_1, \ldots, x_m=y\}$$

---

* Выпуклость метрического пространства $(X, \rho)$ в смысле Менгера означает следующее: для любой пары $x, y\in X$ найдется элемент $z\in X$ такой, что $\rho(x, z)+\rho(z, y)=\rho(x, y)$.

($m$ может зависеть от $x$, $y$) такая, что $\rho(x_{i-1}, x_i) < \mu$ для всех $i = 1, \ldots, m$. В качестве примера пространства, которое не является $\mu$-цепным (при $\mu < 1$), можно указать пространство изолированных точек [пространство с дискретной метрикой $\rho(x, y) = 1$, если $x \neq y$].

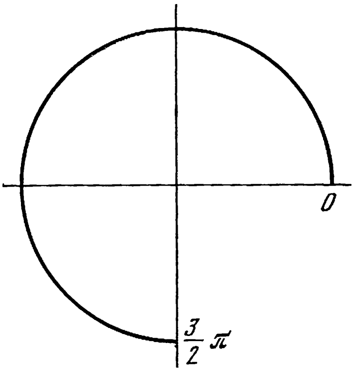


Рис. 3

Теорема 10.3. *Пусть оператор $F$, действующий в полном метрическом $\varepsilon$-цепном пространстве $(X, \rho)$, является $(\varepsilon, \lambda)$-равномерно локально сжимающим; тогда в $X$ существует единственная неподвижная точка оператора $F$.*

Доказательство. Возьмем произвольное $x \in X$ и рассмотрим $\varepsilon$-цепь $w^{\varepsilon}_{xF(x)} = \{x = x_0, \ldots, x_m = F(x)\}$. Из неравенства треугольника

$$\rho(x, F(x)) \leqslant \sum_{i=1}^{m} \rho(x_{i-1}, x_i) < m\varepsilon.$$

Применяя далее индукцию, легко приходим к неравенству

$$\rho(F^k(x), F^{k+1}(x)) \leqslant \sum_{i=1}^{m} \rho(F^k(x_{i-1}), F^k(x_i)) \leqslant \lambda^k m\varepsilon,$$

откуда следует, что последовательность $\{F^k(x)\}$ фундаментальна. Действительно,

$$\rho(F^j(x), F^k(x)) \leqslant \sum_{i=j}^{k-1} \rho(F^i(x), F^{i+1}(x)) \leqslant$$
$$\leqslant m\varepsilon(\lambda^j + \ldots + \lambda^{k-1}) < m\varepsilon \frac{\lambda^j}{1-\lambda} \quad \text{при} \quad j \to \infty \; (k > j).$$

Очевидно, оператор $F$ непрерывен. Из полноты $(X, \rho)$ и непрерывности $F$ вытекает: $F^k(x) \to x^*$ и $F(x^*) = x^*$. Единственность $x^*$ очевидна. ▲

Глава третья

# НЕЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В ПОЛУУПОРЯДОЧЕННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

В этой главе продолжается изучение вопросов существования и единственности неподвижных точек (или, если угодно, существования и единственности равновесия в системе). При этом рассматриваются специальные типы операторов, свойства которых так или иначе интерпретируются в терминах полуупорядоченности. Несмотря на то, что результаты имеют общий характер, изложение привязано к случаю конечномерного пространства.

Поясним используемую далее терминологию. Замкнутое выпуклое множество $K \subset R^n$ называется конусом, если из $\boldsymbol{x} \in K$ следует $\alpha\boldsymbol{x} \in K$ при любом $\alpha \geqslant 0$, а из $\boldsymbol{x}$, $-\boldsymbol{x} \in K$ вытекает $\boldsymbol{x} = 0$. Конус $K$ определяет в $R^n$ отношение полуупорядоченности: $\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{y}$, если $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} \in K$. Независимо от типа конуса отношение $\geqslant$ обладает следующими свойствами:

1) $\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{y} \Rightarrow \begin{cases} \alpha\boldsymbol{x} \geqslant \alpha\boldsymbol{y} & \text{при } \alpha \geqslant 0, \\ \alpha\boldsymbol{x} \leqslant \alpha\boldsymbol{y} & \text{при } \alpha < 0; \end{cases}$

2) $\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{y}, \quad \boldsymbol{y} \geqslant \boldsymbol{z} \Rightarrow \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{z}$;

3) $\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{y}, \quad \boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{y} \Rightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$;

4) $\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{y}, \quad \boldsymbol{u} \geqslant \boldsymbol{v} \Rightarrow \boldsymbol{x} + \boldsymbol{u} \geqslant \boldsymbol{y} + \boldsymbol{v}$;

5) если $\boldsymbol{x}_k \to \boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}_k \to \boldsymbol{y}$ и $\forall k: \boldsymbol{x}_k \geqslant \boldsymbol{y}_k$, то $\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{y}$.

В качестве конуса в $R^n$ чаще всего выбирается неотрицательный ортант $R^n_+$. В этом случае $\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{y}$ означает не что иное, как $x_i \geqslant y_i$ $(i = 1, \ldots, n)$. При желании под $K$ везде далее можно подразумевать $R^n_+$.

## § 1. Положительные операторы

Довольно часто в приложениях по смысловым ограничениям координаты вектора $x$ (характеризующего состояние системы) не могут принимать отрицательные значения, а изучаемый оператор $F$ отображает неотрицательный ортант в себя. Например, в модели сосуществования биологических видов (глава I, § 2) как численности, так и стационарные численности не могут быть отрицательными. Абстрагируясь от этой ситуации, будем изучать операторы $F$ такие, что из $x \geqslant 0$ следует $F(x) \geqslant 0$, т. е. $F(K) \subset K$. Такие операторы называются *положительными.*

Нас будет интересовать вопрос о существовании на $K$ неподвижной точки оператора $F$, т. е. точки $x \in K$, в которой $F(x^*) = x^*$. Точнее говоря, мы будем интересоваться существованием ненулевой неподвижной точки. Дело в том, что во многих приложениях имеется тривиальное положение равновесия $x^* = 0$ ($F(0) = 0$), и задача состоит в установлении существования нетривиального решения уравнения $F(x) = x$.

Положительный оператор $F(F(0) = 0)$ называется *сжатием конуса*, если найдутся такие $R > r > 0$, что *

$$F(x) \overline{\leqslant} x \quad (x \in K, \|x\| = r); \tag{1.1}$$

$$F(x) \overline{\geqslant} x \quad (x \in K, \|x\| = R). \tag{1.2}$$

Условия (1.1) и (1.2) удобно интерпретировать следующим образом. Если $F(x) \geqslant x$, то говорят, что точка $x$ под действием оператора $F$ *«идет вперед»*. Если же $F(x) \leqslant x$, то говорят, что точка $x$ *«идет назад»*. Таким образом, условия (1.1) и (1.2) означают, что не существует точек $x$, с достаточно малой нормой «идущих назад», и точек $x$, с достаточно большой нормой «идущих вперед». Такие условия представляются естественными для целого ряда моделей.

Теорема 1.1. *Пусть непрерывный положительный оператор $F$ является сжатием конуса; тогда $F$ на $K$ имеет по крайней мере одну ненулевую неподвижную точку.*

Для доказательства удобно воспользоваться методикой переопределения оператора. Выберем произвольный ненулевой элемент $u_0 \in K$ и введем в рассмотрение оператор

$$\tilde{F}(x) = \begin{cases} \dfrac{\|x\|}{r} F\left(\dfrac{r}{\|x\|} x\right) + (r - \|x\|) u_0, & \text{если } \|x\| \leqslant r; \\ F(x), & \text{если } r \leqslant \|x\| \leqslant R; \\ F\left(\dfrac{R}{\|x\|} x\right), & \text{если } \|x\| \geqslant R. \end{cases}$$

Очевидно, оператор $\tilde{F}$ непрерывен, преобразует конус $K$ в свою компактную часть, не содержащую 0, и поэтому имеет на $K$ ненулевую неподвижную точку $x^* \neq 0$.

Теорема будет доказана, если показать, что

$r \leqslant \|x^*\| \leqslant R.$

---

* Запись $u \overline{\leqslant} v$ означает $v - u \notin K$.

Пусть $\|x^*\| < r$. Тогда

$$\frac{\|x^*\|}{r} F\left(\frac{r}{\|x^*\|} x^*\right) + (r - \|x^*\|) u_0 = x^*. \qquad (1.3)$$

Из (1.3) следует

$$F\left(\frac{r}{\|x^*\|} x^*\right) \leqslant \frac{r}{\|x^*\|} x^*,$$

что противоречит (1.1).

Пусть теперь $\|x^*\| > R$. Тогда

$$F\left(\frac{R}{\|x^*\|} x^*\right) = x^*,$$

что означает

$$F\left(\frac{R}{\|x^*\|} x^*\right) = (1 + \varepsilon) \frac{R}{\|x^*\|} x^*,$$

где $\varepsilon = (\|x^*\|/R) - 1 > 0$. Но это противоречит (1.2). ▲

В скалярном случае теорема 1.1 приобретает совершенно прозрачный смысл. Пусть функция $f: [0, \infty) \to [0, \infty)$ непрерывна и при достаточно малых $x \neq 0$ выполняется неравенство $f(x) - x > 0$, а при достаточно больших $f(x) - x < 0$; тогда существует точка $x \in (0, \infty)$, в которой $f(x) - x = 0$. Но в скалярном случае такой вывод можно сделать и тогда, когда $f(x) - x < 0$ при достаточно малых $x \neq 0$ и $f(x) - x > 0$ при достаточно больших $x$. Обобщение этой ситуации приводит к понятию *оператора, растягивающего конус.*

Положительный оператор $F(F(0) = 0)$ назовем растяжением конуса $K$, если найдутся такие $R > r > 0$, что

$$F(x) \,\overline{\leqslant}\, x \; (x \in K, \|x\| = R);$$

$$F(x) \,\overline{\geqslant}\, x \; (x \in K, \|x\| = r). \qquad (1.4)$$

Теорема 1.2. *Пусть непрерывный оператор $F$ положителен и растягивает конус $K$; тогда $F$ на $K$ имеет по крайней мере одну ненулевую неподвижную точку.*

Перейдем от $F(x)$ к оператору $\|x\|^2 F(x/\|x\|^2)$. Последний, очевидно, сжимает конус и по теореме 1.1 имеет неподвижную точку $x_0$

$$\|x_0\|^2 F(x_0/\|x_0\|^2) = x_0.$$

Ясно, что $x^* = x_0/\|x_0\|^2$ — неподвижная точка оператора $F$. ▲

Заметим, что при определении сжатия конуса предположение $F(0) = 0$ не обязательно. Если $F(0) \neq 0$ и оператор $F$ непрерывен, то условие (1.1) в этом случае выполняется автоматически. Условие же (1.4) в определении растяжения конуса для непрерывного оператора $F$ с необходимостью приводит к требованию $F(0) = 0$.

Иногда более удобной оказывается несколько иная (эквивалентная) формулировка условий сжатия или растяжения конуса. Дадим сначала содержательную интерпретацию этих условий.

Пусть полуупорядоченность введена неотрицательным ортантом, а $F(\boldsymbol{x})$ представляет собой оператор межэлементных связей. Переменную $x_i$ назовем величиной усилия $i$-го элемента системы, $f_i(\boldsymbol{x})$ — его текущим положением цели и будем говорить, что элементу $A_i$ выгодно увеличивать (уменьшать) свое усилие, если $x_i < f_i(\boldsymbol{x})$ ($x_i > f_i(\boldsymbol{x})$).

Возьмем теперь произвольную точку $\boldsymbol{x} \in R^n_+ (\boldsymbol{x} \neq 0)$ и заставим элементы двигаться по лучу $t\boldsymbol{x} (t > 0)$, т. е. пропорционально изменять усилия. Довольно часто оказывается (или представляется естественным при качественном анализе), что начиная с какого-то достаточно большого $t$ хотя бы одному элементу далее не выгодно увеличивать свое усилие, а начиная с какого-то достаточно малого $t$ хотя бы одному элементу далее не выгодно уменьшать свое усилие. Игнорируя детали, можно сказать, что в этом случае оператор $F(\boldsymbol{x})$ является сжатием конуса. Аналогичную интерпретацию можно дать также для растяжения конуса. Приведем теперь точный результат.

Теорема 1.3. *Пусть для любой точки $\boldsymbol{x} \in K (\boldsymbol{x} \neq 0)$ можно указать окрестность* $V_x \subset K$, для которой найдется пара $\delta$, $T > 0$ $\delta < T$) такая, что для любого $\boldsymbol{y} \in V_x$ и любого $t \leqslant \delta$*

$$F(t\boldsymbol{y}) \overline{\leqslant} t\boldsymbol{y},$$

*а для любого $t \geqslant T$ и любого $\varepsilon > 0$*

$$F(t\boldsymbol{y}) \overline{\geqslant} (1+\varepsilon) t\boldsymbol{y};$$

*тогда $F(\boldsymbol{x})$ — сжатие конуса.*

Доказательство элементарно. Пересечение единичной сферы с конусом является компактным множеством, поэтому из его покрытия окрестностями $V_x$ можно выбрать конечное подпокрытие, которому будет соответствовать конечное число пар $\{\delta_k, T_k\}$. Тогда для $r = \min\limits_k \delta_k$ и $R = \max\limits_k T_k$ будут выполняться условия (1.1), (1.2). ▲

Формулировка аналогичного результата для случая растяжения конуса не представляет труда.

## § 2. Принцип Биркгофа — Тарского

Займемся определением некоторых понятий, которые нам потребуются.

---

* Подразумевается окрестность в относительной топологии, т. е. $V_x$ представляет собой пересечение окрестности точки $\boldsymbol{x}$ в $R^n$ с конусом $K$.

Элемент $y$ называется верхней границей множества $\mathfrak{R} \subset R^n$, если $y \geqslant x$ $(x \in \mathfrak{R})$. Если множество $\mathfrak{P}$ всех верхних границ не пусто и содержит элемент $y_0$ такой, что $y_0 \leqslant y$ $(y \in \mathfrak{P})$, то $y_0$ называется точной верхней границей множества $\mathfrak{R}$ и обозначается $y_0 = \sup \mathfrak{R}$. Точная нижняя граница определяется аналогично и обозначается $\inf \mathfrak{R}$.

Конус называется миниэдральным, если каждое множество, состоящее из конечного числа элементов, имеет точную верхнюю границу. Если точную верхнюю границу имеет каждое произвольное ограниченное сверху множество, то конус называется сильно миниэдральным. Сильно миниэдрален в $R^n$, например, неотрицательный ортант.

Если неравенство $x \geqslant y$ влечет за собой $F(x) \geqslant F(y)$, то оператор $F$ называется монотонным. Наконец, множество тех элементов $x \in R^n$, которые удовлетворяют неравенствам $v^0 \leqslant x \leqslant w^0$, называется *конусным отрезком* и обозначается $\langle v^0, w^0 \rangle$.

Теперь все готово для формулировки принципа Биркгофа — Тарского (конус, с помощью которого введена полуупорядоченность, предполагается сильно миниэдральным).

Теорема 2.1. *Всякий монотонный оператор $F$ (не обязательно непрерывный), отображающий в себя некоторый конусный отрезок $\langle v^0, w^0 \rangle$, имеет по крайней мере одну неподвижную точку $x^* \in \in \langle v^0, w^0 \rangle$.*

Доказательство. Обозначим через $\Omega$ множество тех элементов $x \in \langle v^0, w^0 \rangle$, которые «идут вперед», т. е. $F(x) \geqslant x$. Очевидно, $\Omega$ не пусто, так как заведомо $F(v^0) \geqslant v^0$. Покажем, что элемент $x^* = \sup \Omega$ — неподвижная точка оператора $F$. Для любого $x \in \Omega$ имеем $F(x^*) \geqslant F(x) \geqslant x$, но так как $x^*$ — точная верхняя граница $\Omega$, то $F(x^*) \geqslant x^*$. Следовательно, $x^* \in \Omega$. С другой стороны, $F(F(x^*)) \geqslant F(x^*)$, поэтому $F(x^*)$ также принадлежит $\Omega$, но тогда $F(x^*) \leqslant x^*$. Два противоположных неравенства дают $F(x^*) = x^*$. ▲

Это, пожалуй, единственный результат (не считая вариаций на эту же тему), позволяющий гарантировать существование неподвижной точки у разрывного оператора.

В качестве иллюстрации рассмотрим нелинейную модель межотраслевого баланса: $i$-я отрасль выпускает $i$-й продукт в количестве $x_i$, а при производстве вектора $x = \{x_1, \ldots, x_n\}$ $i$-й продукт внутри системы расходуется в количестве $p_i(x_1, \ldots, x_n)$. Чистые выпуски при этом равны $y_i = x_i - p_i(x)$, или в векторном виде $y = x - P(x)$. Естественно предположить, что затраты $P(x)$ растут монотонно по $x$ (считаем, что полуупорядоченность введена с помощью $R^n_+$) и $P(0) = 0$.

Теорема 2.2. *Пусть реализуем некоторый набор чистых выпусков $y^0 \geqslant 0$; тогда любой набор чистых выпусков $y \leqslant y^0$ $(y \geqslant 0)$ также реализуем.* (Другими словами, если набор $y \geqslant 0$ можно реализовать с избытком, то его можно реализовать и точно.)

Для доказательства достаточно заметить, что монотонный оператор $P(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{y}$ отображает в себя конусный отрезок $\langle 0, \boldsymbol{x}^0\rangle$, где $\boldsymbol{x}^0=P(\boldsymbol{x}^0)+\boldsymbol{y}^0$, и сослаться на теорему 2.1. ▲

Если бы оператор $P(\boldsymbol{x})$ был непрерывен, можно было бы обойтись без принципа Биркгофа — Тарского, сославшись на теорему Брауэра. Однако предположение о наличии у $P(\boldsymbol{x})$ разрывов в данной модели выглядит достаточно естественно. Разрывы $P(\boldsymbol{x})$ могут быть связаны, например, с изменением способов производства (при изменении $\boldsymbol{x}$).

## § 3. Гетерогенные и гетеротонные операторы

При анализе конкретных примеров (глава I, § 2) отмечалось, что, как правило, оператор межэлементных связей $F(\boldsymbol{x})=\{f_1(\boldsymbol{x}), \ldots, f_n(\boldsymbol{x})\}$ обладает свойством обобщенной монотонности: каждая компонента оператора $f_i(\boldsymbol{x})$ по каждой в отдельности координате $x_j$ или не убывает, или не возрастает. Такие операторы (системы) будем называть *гетерогенными.*

Для удобства дальнейшего изложения с каждой компонентой $f_i(\boldsymbol{x})$ гетерогенного оператора $F$ свяжем подмножество индексов $G_i$

$$G_i\subset I=\{i\mid i=1, \ldots, n\}$$

такое, что если $f_i(\boldsymbol{x})$ монотонно возрастает (не убывает) по $x_j$, то $j\in G_i$. Из определения гетерогенной системы и подмножества $G_i$ следует, что $f_i(\boldsymbol{x})$ монотонно убывает (не возрастает) по $x_j$, если $j\in H_i=I\setminus G_i$.

Свяжем далее с каждой функцией $f_i(\boldsymbol{x})$ пару матриц $P_i=[p^i_{jk}]$ и $Q_i=E-P_i$, где $E$ — единичная матрица, $p^i_{jj}=1$, если $j\in G_i$, остальные $p^i_{jk}=0$.

Определение гетерогенного оператора теперь можно записать в форме

$$\forall i: f_i(P_i\boldsymbol{v}'+Q_i\boldsymbol{w}')\geqslant f_i(P_i\boldsymbol{v}+Q_i\boldsymbol{w}),$$

если только $\boldsymbol{v}'\geqslant\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}'\leqslant\boldsymbol{w}$ (считая, что полуупорядоченность введена неотрицательным ортантом).

В частном случае $\forall i: P_i=E$ оператор $F$ будет монотонным, в случае $\forall i: Q_i=E$ — антимонотонным. Оператор $F$ можно сделать монотонным и в том случае, когда $\forall i: P_i=P$, если вместо $R^n_+$ выбрать другой ортант (в качестве конуса, определяющего полуупорядоченность).

Если функции $f_i(\boldsymbol{x})$ дифференцируемы, то определение гетерогенного оператора может быть записано также в виде

$$\forall i, \boldsymbol{x}, j\in G_i: \frac{\partial f_i}{\partial x_j}\geqslant 0; \qquad \forall i, \boldsymbol{x}, j\in H_i: \frac{\partial f_i}{\partial x_j}\leqslant 0.$$

Обратим, наконец, внимание на тот случай, когда система описывается набором функций-индикаторов $G(\boldsymbol{x})=\{g_1(\boldsymbol{x}), \ldots, g_n(\boldsymbol{x})\}$.

Пусть все функции дифференцируемы. Тогда в силу (глава I, § 1)

$$\forall i: g_i(x_1, \ldots, x_{i-1}, f_i(\boldsymbol{x}), x_{i+1}, \ldots, x_n) = 0$$

имеем

$$\frac{\partial g_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial g_i}{\partial x_i}\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \quad (i \neq j)$$

в любой точке $\boldsymbol{x}$, лежащей на поверхности $x_i = f_i(\boldsymbol{x})$. Кроме того, функции-индикаторы удовлетворяют условию $\forall i: \partial g_i/\partial x_i < 0$. Поэтому если функции $g_i(\boldsymbol{x})$ обобщенно монотонны, то производные $\partial f_i/\partial x_j$ знакопостоянны и, следовательно, система (оператор $F$) гетерогенна *.

Гетерогенные операторы имеют целый ряд полезных свойств. Оказалось также, что сумма и композиция гетерогенных операторов обладают такими же «хорошими» свойствами, хотя они не гетерогенны. Это послужило поводом для выделения существенно более общего класса операторов, названных гетеротонными, которые более глубоко раскрывают природу обобщенной монотонности.

Мы ограничимся здесь случаем полуупорядоченности, задаваемой неотрицательным ортантом $R_+^n$, тем более что этот случай наиболее важен в прикладном отношении.

Оператор $F: R^n \to R^n$ назовем *гетеротонным* на множестве $\mathfrak{M} \subset R^n$, если существует *сопутствующий* ему оператор $\hat{F}: R^n \times R^n \to R^n$ такой, что $\hat{F}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = F(\boldsymbol{x})$ для любого $\boldsymbol{x} \in \mathfrak{M}$ и $\hat{F}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ монотонно возрастает по первому аргументу и монотонно убывает по второму, т. е.

$$\hat{F}(\boldsymbol{v}', \boldsymbol{w}') \geqslant \hat{F}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}),$$

если только $\boldsymbol{v}' \geqslant \boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}' \leqslant \boldsymbol{w}$ $(\boldsymbol{v}', \boldsymbol{w}', \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathfrak{M})$.

Поскольку из контекста всегда ясно, о каком множестве $\mathfrak{M}$ идет речь, оператор $F$ будем называть просто гетеротонным.

Отметим сразу, что монотонный [из $\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{y}$ следует $F(\boldsymbol{x}) \geqslant F(\boldsymbol{y})$] и антимонотонный [из $\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{y}$ следует $F(\boldsymbol{x}) \leqslant F(\boldsymbol{y})$] операторы — частные случаи гетеротонного. Так, для монотонного оператора в качестве сопутствующего можно указать $\hat{F}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = F(\boldsymbol{v})$ [или $\hat{F}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = F(\boldsymbol{v}) + \boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}$ и т. д.]. Для антимонотонного оператора также всегда можно указать сопутствующий $\hat{F}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = F(\boldsymbol{w})$.

Гетеротонным является и любой гетерогенный оператор $F$. Под сопутствующим для него всегда будем понимать

$$\hat{F}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = \{\hat{f}_1(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}), \ldots, \hat{f}_n(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})\},$$

где $\hat{f}_i(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = f_i(P_i\boldsymbol{v} + Q_i\boldsymbol{w})$.

---

* Легко видеть, что вывод остается в силе и без предположения о дифференцируемости.

В общем случае выбор сопутствующего оператора для гетеротонного требует определенной изобретательности. Укажем один довольно общий прием, суть которого легче всего пояснить на простом примере.

Пусть $F$ действует в $R_+^2$ и точке $\boldsymbol{x}=\{x_1, x_2\}\in R_+^2$ сопоставляет точку $\boldsymbol{y}=\{y_1, y_2\}$ по правилу

$$\begin{aligned} y_1&=f_1(\boldsymbol{x})=\operatorname{arctg} x_1+\sqrt[10]{\frac{x_2}{x_1}}; \\ y_2&=f_2(\boldsymbol{x})=\sqrt{\frac{x_1+x_2}{5+x_1}}+\sqrt[10]{\frac{x_1}{x_2}}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Здесь нельзя сказать, что функции $f_1$ и $f_2$ обобщенно монотонны. Тем не менее идея построения сопутствующего оператора может быть оставлена прежней. Каждое конкретное $x_i$ (из тех $x_i$, которые неоднократно повторяются в записи функции $f_1$ или $f_2$) заменяем на $\boldsymbol{v}_i$ или $\boldsymbol{w}_i$ в зависимости от того, возрастает или убывает функция $f_1(f_2)$ по этому конкретному аргументу (но не вообще по $x_i$).

Такое построение приводит к сопутствующему оператору $\hat{F}$, компонентами которого являются

$$\begin{aligned} \hat{f}_1(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})&=\operatorname{arctg} v_1+\sqrt[10]{\frac{v_2}{w_1}}; \\ \hat{f}_2(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})&=\sqrt{\frac{v_1+v_2}{5+w_1}}+\sqrt[10]{\frac{v_1}{w_2}}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Использованная здесь идея представляется достаточно общей и оказывается работоспособной во многих практических случаях. По этой причине представляют интерес некоторые специальные приемы, которые позволяют приводить изучаемый оператор к виду, удобному для применения описанного метода (в тех случаях, когда исходный вид оператора не допускает его непосредственного использования). Укажем один из таких приемов, сущность которого проявляется уже в одномерном случае.

Пусть функция $f(x)$ определена на сегменте $[0, \pi]$ и $f(x)=\sin x$. Введем в рассмотрение две функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$. Функция $\varphi_1(x)$ на $[0, \pi/2]$ совпадает с $f(x)$, а на $[\pi/2, \pi]$ $\varphi_1(x)\equiv 1$. Функция $\varphi_2(x)\equiv 1$ на $[0, \pi/2]$ и совпадает с $f(x)$ на $[\pi/2, \pi]$. Очевидно, исходную функцию $f(x)=\sin x$ можно записать в виде $f(x)=\min\{\varphi_1(x), \varphi_2(x)\}$, что приводит к сопутствующей функции

$$\hat{f}(v, w)=\min\{\varphi_1(v), \varphi_2(w)\}.$$

Хотя выбор сопутствующего оператора всегда неоднозначен, везде в дальнейшем, когда речь идет о гетеротонном операторе, подразумевается, что сопутствующий оператор уже конкретно указан.

Теорема 3.1. *Сумма и композиция (произведение) гетеротонных операторов — гетеротонные операторы.*

Доказательство тривиально. Пусть $F_1$ и $F_2$ — гетеротонные операторы. Тогда для суммы $F_1+F_2$ сопутствующим будет $\hat{F}_1(v, w)+\hat{F}_2(v, w)$, для композиции $F_1F_2$ —

$$\hat{F}_1(\hat{F}_2(v, w), \hat{F}_2(w, v)). \blacktriangle$$

Конусный отрезок $\langle v^0, w^0\rangle$ назовем *сильно инвариантным* для гетеротонного оператора $F$, если

$$\hat{F}(v^0, w^0)\geqslant v^0, \quad \hat{F}(w^0, v^0)\leqslant w^0. \tag{3.3}$$

Очевидно, из сильной инвариантности конусного отрезка вытекает его обычная инвариантность. Действительно, пусть $x\in\langle v^0, w^0\rangle$, тогда

$$v^0\leqslant \hat{F}(v^0, w^0)\leqslant \hat{F}(x, x)=F(x)\leqslant \hat{F}(w^0, v^0)\leqslant w^0,$$

т. е. $F(\langle v^0, w^0\rangle)\subset\langle v^0, w^0\rangle$. Присовокупляя сюда теорему Брауэра, приходим к следующему результату.

Теорема 3.2. *Пусть гетеротонный оператор $F$ непрерывен и существует пара точек $v^0$, $w^0$ $(v^0\leqslant w^0)$, удовлетворяющая соотношениям (3.3). Тогда у оператора $F$ существует неподвижная точка $x^*\in\langle v^0, w^0\rangle$.* $\blacktriangle$

В частном случае гетерогенного оператора справедлива также обратная импликация: обычная инвариантность конусного отрезка влечет за собой сильную инвариантность. Поскольку этот факт будет использоваться далее, сформулируем его в виде теоремы.

Теорема 3.3. *Пусть гетерогенный оператор $F$ имеет инвариантный конусный отрезок $\langle v^0, w^0\rangle$; тогда $\langle v^0, w^0\rangle$ сильно инвариантен для $F$.*

Действительно, $\forall i: P_iv^0+Q_iw^0\in\langle v^0, w^0\rangle$, поэтому в силу инвариантности $\langle v^0, w^0\rangle$

$$\forall i: f_i(P_iv^0+Q_iw^0)\geqslant v_i^0. \tag{3.4}$$

Аналогичным образом устанавливается справедливость неравенств

$$\forall i: f_i(P_iw^0+Q_iv^0)\leqslant w_i^0. \tag{3.5}$$

Неравенства (3.4) и (3.5) в совокупности дают (3.3). $\blacktriangle$

## § 4. Псевдовогнутость и неподвижные точки

Пусть гетеротонный оператор $F$ обладает тем свойством, что $\hat{F}(v, w) \in \operatorname{int} R^n_+$ для любых $v, w \in \operatorname{int} R^n_+$. Пусть, кроме того, для любых $v, w \in \operatorname{int} R^n_+$, $\tau \in (0, 1)$ и любого $i = 1, \ldots, n$ выполняются неравенства

$$\hat{f}_i\left(\tau v, \frac{1}{\tau} w\right) > \tau \hat{f}_i(v, w). \tag{4.1}$$

Тогда оператор называется *псевдовогнутым.*

Неравенства (4.1) можно записать также в векторном виде

$$\hat{F}\left(\tau v, \frac{1}{\tau} w\right) > \tau \hat{F}(v, w), \tag{4.2}$$

если считать, что $x > y$ означает $x - y \in \operatorname{int} R^n_+$.

Псевдовогнутые операторы обладают следующим важным свойством.

Теорема 4.1. *Псевдовогнутый оператор, имеющий неподвижную точку $x^* \in \operatorname{int} R^n_+$, всегда имеет сильно инвариантный (а значит, и просто инвариантный) конусный отрезок $\langle v^0, w^0 \rangle \subset \operatorname{int} R^n_+$, содержащий любую наперед заданную точку $x^0 \in \operatorname{int} R^n_+$.*

Доказательство. Легко видеть, что помимо (4.2) для псевдовогнутого оператора выполняется также неравенство

$$\hat{F}\left(\frac{1}{\tau} v, \tau w\right) < \frac{1}{\tau} \hat{F}(v, w).$$

Поэтому сильно инвариантным будет любой конусный отрезок $\left\langle \tau x^*, \frac{1}{\tau} x^* \right\rangle$ при $\tau \in (0, 1)$. Действительно,

$$\hat{F}\left(\tau x^*, \frac{1}{\tau} x^*\right) > \tau \hat{F}(x^*, x^*) = \tau F(x^*) = \tau x^*;$$

$$\hat{F}\left(\frac{1}{\tau} x^*, \tau x^*\right) < \frac{1}{\tau} \hat{F}(x^*, x^*) = \frac{1}{\tau} F(x^*) = \frac{1}{\tau} x^*.$$

Для любого $x^0 \in \operatorname{int} R^n_+$ выбором достаточно малого $\tau \in (0, 1)$ всегда можно добиться, чтобы $x^0 \in \left\langle \tau x^*, \frac{1}{\tau} x^* \right\rangle$. ▲

Наличие сильно инвариантного конусного отрезка будет играть существенную роль при изучении вопросов динамики систем. Для задач же статики роль этого факта менее существенна, но и здесь он приводит к некоторым полезным следствиям. Например, из инвариантности $\left\langle \tau x^*, \frac{1}{\tau} x^* \right\rangle$ для $F$ вытекает, что вращение векторного поля $x - F(x)$ на границе $\left\langle \tau x^*, \frac{1}{\tau} x^* \right\rangle$ отлично от нуля (равно единице; см. главу II, § 3). Поэтому вывод о существовании у $F$ неподвижной точки корректен в том смысле, что любой близкий к $F$ оператор также имеет неподвижную точку. В частности, это соображение можно использовать при изучении позитивного спектра оператора $F$, т. е. множества тех $\lambda > 0$, при которых уравнение $F(x) = \lambda x$ имеет решение. Ясно, что позитивный спектр псевдовогнутого оператора всегда является открытым множеством, поскольку из существования неподвижной точки у оператора $\frac{1}{\lambda} F$ вытекает по указанной выше причине существование неподвижной точки у оператора $\frac{1}{\lambda + \Delta\lambda} F$, если только $\Delta\lambda$ достаточно мало по абсолютной величине.

Интерес к псевдовогнутым операторам, однако, определяется не столько утверждением теоремы 4.1, сколько тем обстоятельством, что (как будет показано) псевдовогнутый оператор не может иметь на $\operatorname{int} R_+^n$ более одной неподвижной точки. Этим свойством обладает также более широкий класс операторов, которые мы назовем *псевдовогнутыми на диагонали*. Именно этот класс операторов мы и будем пока изучать.

Гетеротонный оператор $F : \operatorname{int} R_+^n \to \operatorname{int} R_+^n$ назовем псевдовогнутым на диагонали, если для любых $x \in \operatorname{int} R_+^n$, $\tau \in (0, 1)$, $i = 1, \ldots, n$ выполняются неравенства

$$\hat{f}_i\left(\tau x, \frac{1}{\tau} x\right) > \tau f_i(x). \tag{4.3}$$

Понятно, что псевдовогнутый оператор заведомо псевдовогнут на диагонали.

Теорема 4.2. *Для монотонных, антимонотонных и гетеротонных операторов понятия псевдовогнутости и псевдовогнутости на диагонали совпадают.*

Утверждение тривиально. Из перечисленных случаев последний охватывает первые два. Пусть гетерогенный оператор $F$ псевдовогнут на диагонали. Покажем, что тогда из (4.3) следует (4.1) (обратное очевидно). Пусть $v, w \in \operatorname{int} R_+^n$. Тогда $x = P_i v + Q_i w \in \operatorname{int} R_+^n$ и

$$P_i x + Q_i x = P_i v + Q_i w.$$

Следовательно,

$$f_i\left(P_i \tau v + Q_i \frac{1}{\tau} w\right) = f_i\left(P_i \tau x + Q_i \frac{1}{\tau} x\right) > \tau f_i(x) =$$

$$= \tau f_i(P_i v + Q_i w). \ \blacktriangle$$

В частном случае монотонного оператора неравенства (4.3) переходят в

$$f_i(\tau x) > \tau f_i(x) \tag{4.4}$$

и оператор называется *вогнутым*.

Для антимонотонного оператора (4.3) приобретает вид

$$f_i\left(\frac{1}{\tau}x\right) > \tau f_i(x). \tag{4.5}$$

В этом случае антимонотонный оператор будем называть *антивогнутым.*

При изучении псевдовогнутых операторов весьма эффективно систематическое использование следующей специальной метрики:

$$\rho(x, y) = \min\{\alpha : e^{-\alpha}x \leqslant y \leqslant e^{\alpha}x\} \ (x, y \in \operatorname{int} R_+^n). \tag{4.6}$$

Аксиомы метрики здесь проверяются без труда. Топологии, порождаемые на $\operatorname{int} R_+^n$ метрикой $\rho$ и нормой $\|x\| = \max\limits_i |x_i|$ (или любой другой, так как все нормы в $R^n$ эквивалентны), совпадают.

Теорема 4.3. *Любой псевдовогнутый на диагонали оператор непрерывен на* $\operatorname{int} R_+^n$.

Доказательство. В силу (4.3) и (4.6) для любых $x, y \in \operatorname{int} R_+^n$ $(x \neq y)$ имеем

$$f_i(x) = \hat{f}_i(x, x) \geqslant \hat{f}_i(e^{-\rho(x,y)}y, e^{\rho(x,y)}y) > e^{-\rho(x,y)}f_i(y);$$

$$f_i(y) = \hat{f}_i(y, y) \geqslant \hat{f}_i(e^{-\rho(x,y)}x, e^{\rho(x,y)}x) > e^{-\rho(x,y)}f_i(x).$$

Сопоставляя полученные неравенства с (4.6), приходим к выводу

$$\forall x, y \in \operatorname{int} R_+^n, x \neq y : \rho(F(x), F(y)) < \rho(x, y). \tag{4.7}$$

Следовательно, оператор $F$ непрерывен на $\operatorname{int} R_+^n$ по метрике $\rho$, а значит, и по любой норме. ▲

Теорема 4.4. *Псевдовогнутый на диагонали оператор не может иметь в* $\operatorname{int} R_+^n$ *более одной неподвижной точки.*

Предположим противное. Пусть $\overset{*}{x}_1$ и $\overset{*}{x}_2$ — две различные неподвижные точки псевдовогнутого оператора $F$. Тогда необходимо

$$\rho(F(\overset{*}{x}_1), F(\overset{*}{x}_2)) = \rho(\overset{*}{x}_1, \overset{*}{x}_2),$$

что вступает в противоречие с (4.7). ▲

Теорема 4.4 дает возможность гарантировать единственность, если существование неподвижной точки установлено. Последний вопрос может решаться на основе использования результатов, описанных ранее. Однако существование неподвижной точки можно присовокупить к выводам теоремы, если несколько усилить предположения.

Теорема 4.5. *Пусть псевдовогнутый на диагонали оператор* $F$ *удовлетворяет более сильным, чем* (4.3), *неравенствам*

$$\hat{f}_i\left(\tau x, \frac{1}{\tau}x\right) \geqslant \tau^{\varkappa} f_i(x), \ \varkappa \in (0, 1);$$

*тогда в* $\operatorname{int} R_+^n$ *существует единственная неподвижная точка оператора* $F$.

Применяя выкладки, аналогичные тем, которые были использованы при доказательстве теоремы 4.3, получаем

$$\forall x, y \in \operatorname{int} R_+^n,\ x \neq y : \rho(F(x), F(y)) \leqslant \varkappa\rho(x, y).$$

Остается заметить, что $\operatorname{int} R_+^n$ по метрике $\rho$ — полное метрическое пространство. Поэтому выполняются условия принципа сжимающих отображений, что и приводит к требуемому утверждению. ▲

## § 5. Интерпретация условий псевдовогнутости

В случае монотонного и антимонотонного операторов условия псевдовогнутости (4.4) и (4.5) могут интерпретироваться как ограничения на скорость роста функций $f_i(x)$. Подобная интерпретация возможна и в общем случае. Например, для гетерогенного оператора качественные рассуждения в пользу неравенств

$$f_i\left(P_i\tau x + Q_i\frac{1}{\tau}x\right) > \tau f_i(x)$$

могут быть примерно такими: если в $f_i(x)$ те координаты $x_j$, по которым $f_i$ возрастает, уменьшить в 2 раза, а остальные увеличить в 2 раза, то $f_i(x)$ безусловно уменьшится, но не более чем в 2 раза.

Условия псевдовогнутости могут быть проинтерпретированы также в терминах производных.

Теорема 5.1. *Пусть гетеротонный оператор* $F$ *удовлетворяет следующему условию: для любых* $v, w \in \operatorname{int} R_+^n$

$$H(v, w) = \hat{F}(v, w) - \hat{F}'_v(v, w)\, v + \hat{F}'_w(v, w)\, w \in \operatorname{int} R_+^n; \tag{5.1}$$

*тогда оператор* $F$ *псевдовогнут на диагонали* *.

Через $\hat{F}'_v(v, w)$ здесь обозначена производная Фреше $\hat{F}(v, w)$ по $v$. Другими словами, (5.1) означает не что иное, как

$$\forall i : h_i(v, w) = \hat{f}_i(v, w) - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \hat{f}_i(v, w)}{\partial v_j} v_j + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \hat{f}_i(v, w)}{\partial w_j} w_j > 0. \tag{5.2}$$

Перейдем к доказательству теоремы. Предположим, что оператор $F$ не псевдовогнут на диагонали. Тогда найдутся $\tau_0 \in (0, 1)$ и $x_0 \in \operatorname{int} R_+^n$ такие, что

$$z_0 = \hat{F}\left(\tau_0 x_0, \frac{1}{\tau_0} x_0\right) - \tau_0 F(x_0) \notin \operatorname{int} R_+^n.$$

* И даже псевдовогнут.

Но тогда существует вектор $a$ такой, что $(a, z_0) \leqslant 0$ и $(a, x) > 0$ для любого $x \in \operatorname{int} R^n_+$.

Введем в рассмотрение функцию

$$\omega(\tau) = \left(a, \frac{1}{\tau} \hat{F}\left(\tau x_0, \frac{1}{\tau} x_0\right) - F(x_0)\right), \quad \tau \in (0, 1].$$

Легко проверить, что

$$\frac{d\omega}{d\tau} = -\left(a, \frac{H\left(\tau x_0, \frac{1}{\tau} x_0\right)}{\tau^2}\right).$$

Следовательно, в силу (5.1) и определения $a$, $d\omega/d\tau < 0$. Поэтому $\omega(\tau_0) > \omega(1) = 0$. С другой стороны, $\omega(\tau_0) = \frac{1}{\tau_0}(a, z_0) \leqslant 0$. Полученное противоречие завершает доказательство. ▲

В частном случае гетерогенного оператора соответствующий результат приобретает более простую форму.

Теорема 5.2. *Для того чтобы дифференцируемый гетерогенный оператор $F$ был псевдовогнутым, достаточно выполнения условия*

$$\forall\, i,\ x \in \operatorname{int} R^n_+ : f_i(x) - \sum_{j=1}^{n} \left|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right| x_j > 0 \tag{5.3}$$

*и необходимо выполнение ослабленного условия* (5.3) [*получающегося из* (5.3) *заменой знака* $>$ *на* $\geqslant$].

Достаточность. Для любых $v, w \in \operatorname{int} R^n_+$ вектор $P_i v + Q_i w$ — не что иное, как некоторое $x \in \operatorname{int} R^n_+$. Кроме того, $\hat{f}_i(v, w) = f_i(P_i v + Q_i w)$. Поэтому в данном случае неравенства (5.2) и (5.3) содержательно эквивалентны, и для получения требуемого утверждения остается сослаться на теорему 5.1.

Необходимость. Пусть $F$ псевдовогнут, но ослабленное условие (5.3) не выполняется, т. е. существует такой элемент $x_0 \in \operatorname{int} R^n_+$, что

$$y_0 = H(x_0, x_0) \notin R^n_+.$$

Тогда найдется вектор $a$ такой, что $(a, y_0) < 0$ и $(a, x) > 0$ для любого $x \in \operatorname{int} R^n_+$.

Вводя далее, как при доказательстве теоремы 5.1, функцию $\omega(\tau)$ и вычисляя ее производную, получим $\frac{d\omega(1)}{d\tau} > 0$ [в силу $(a, y_0) < 0$]. Отсюда следует, что для $\tau \in (0, 1)$, достаточно близких к 1, будет $\omega(\tau) < \omega(1) = 0$. Но это противоречит предположению о псевдовогнутости $F$. ▲

Во избежание недоразумений отметим, что понятие вогнутости монотонного оператора и тем более псевдовогнутости на диагонали гетеротонного отличается по своей природе от понятия вогнутости, которое изучается в выпуклом анализе. Приведем простейшую геометрическую иллюстрацию. Пусть функция $f(x)$ скалярной переменной $x$ монотонно возрастает и вогнута в смысле (4.2), т. е.

$$\forall x>0,\ \tau\in(0,\ 1):\qquad f(\tau x)>\tau f(x). \tag{5.4}$$

Условие (5.4) равносильно требованию, что любой луч пересекает график $f(x)$ не более чем в одной точке $x\neq 0$ (рис. 4). Понятно, что для этого вовсе не обязательно, чтобы функция $f(x)$ была вогнута в обычном смысле (ее производная может быть немонотонной, как на рис. 4, *а*, и это может быть даже выпуклая

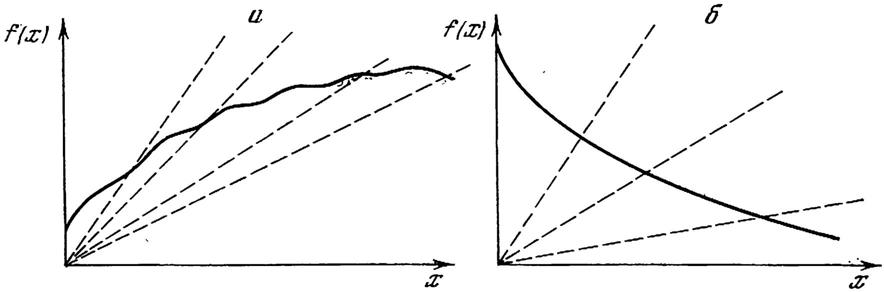



**Рис. 4**

функция, как на рис. 4, *б*). Однако, если $f(x)$ вогнута в обычном смысле, то условие (5.4) выполняется автоматически, т. е. обычная вогнутость — одно из достаточных условий, обеспечивающих справедливость (5.4).

Сейчас мы приведем подобные достаточные условия вогнутости (4.4) и псевдовогнутости в терминах монотонности или обобщенной монотонности производных. Во многих конкретных задачах действительно можно ожидать, что свойством обобщенной монотонности обладают не только компоненты $f_i(\boldsymbol{x})$ оператора межэлементных связей, но и их частные производные $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$. Это обычно соответствует присутствию в системе различного рода эффектов насыщения.

Начнем со случая монотонного оператора. Если производную $\dfrac{\partial f_i(\boldsymbol{x})}{\partial x_j}$ принять за величину влияния элемента $A_j$ на элемент $A_i$ в состоянии системы $\boldsymbol{x}$, то для целого ряда систем вполне приемлемым представляется следующее качественное предположение. По мере роста $\boldsymbol{x}$ влияние элементов друг на друга уменьшается (не увеличивается), т. е.

$$\forall\, \boldsymbol{x}' \geqslant \boldsymbol{x}:\ \frac{\partial f_i(\boldsymbol{x}')}{\partial x_j} \leqslant \frac{\partial f_i(\boldsymbol{x})}{\partial x_j}. \tag{5.5}$$

Теорема 5.3. *Пусть монотонный оператор $F$ отображает $R_+^n$ в* $\operatorname{int} R_+^n$ *и выполнено условие* (5.5). *Тогда оператор $F$ вогнут.*

Для антимонотонного оператора аналогичный результат имеет более сложную форму. Здесь уже недостаточно требовать убывания модулей производных $\frac{\partial f_i(\boldsymbol{x})}{\partial x_j}$ с ростом $\boldsymbol{x}$, а приходится сравнивать скорость убывания функций $\left|\frac{\partial f_i\left(\frac{1}{\theta}\boldsymbol{x}\right)}{\partial x_j}\right|$ (при уменьшении $\theta$ от 1 до 0) со скоростью изменения функции $\theta^2$. Более точно результат формулируется следующим образом.

Теорема 5.4. *Пусть антимонотонный оператор $F$ отображает* $\operatorname{int} R_+^n$ *в себя и*

$$\forall\, \boldsymbol{x} \in \operatorname{int} R_+^n:\ \frac{1}{\theta_1^2}\left|\frac{\partial f_i\left(\frac{1}{\theta_1}\boldsymbol{x}\right)}{\partial x_j}\right| > \frac{1}{\theta_2^2}\left|\frac{\partial f_i\left(\frac{1}{\theta_2}\boldsymbol{x}\right)}{\partial x_j}\right|,$$

*где* $0<\theta_1<\theta_2<1$. *Тогда оператор $F$ антивогнут.*

Теоремы 5.3 и 5.4 — частные случаи следующего более общего утверждения.

Теорема 5.5. *Пусть гетерогенный оператор $F$ отображает $R_+^n$ в* $\operatorname{int} R_+^n$ *и для любого* $\boldsymbol{x} \in \operatorname{int} R_+^n$ *и любого* $i = 1, \ldots, n$ *выполняются неравенства*

$$\frac{\partial f_i\left(P_i\theta_1\boldsymbol{x} + Q_i\frac{1}{\theta_1}\boldsymbol{x}\right)}{\partial x_j} \geqslant \frac{\partial f_i\left(P_i\theta_2\boldsymbol{x} + Q_i\frac{1}{\theta_2}\boldsymbol{x}\right)}{\partial x_j}, \tag{5.6}$$

*где* $j \in G_i$, $0<\theta_1<\theta_2<1$, *и*

$$\frac{1}{\theta_1^2}\left|\frac{\partial f_i\left(P_i\theta_1\boldsymbol{x} + Q_i\frac{1}{\theta_1}\boldsymbol{x}\right)}{\partial x_j}\right| > \frac{1}{\theta_2^2}\left|\frac{\partial f_i\left(P_i\theta_2\boldsymbol{x} + Q_i\frac{1}{\theta_2}\boldsymbol{x}\right)}{\partial x_j}\right|, \tag{5.7}$$

*где* $j \in H_i$, $0<\theta_1<\theta_2<1$.

*Тогда оператор $F$ псевдовогнут.*

Доказательство. Для любого $\boldsymbol{x} \in \operatorname{int} R_+^n$ функция $f_i\left(P_i\tau\boldsymbol{x} + Q_i\frac{1}{\tau}\boldsymbol{x}\right)$ при $\tau \to 0$ убывает и ограничена, поэтому существует предел

$$\lim_{\tau\to 0} f_i\left(P_i\tau x + Q_i \frac{1}{\tau} x\right) = \varphi_i(x) \geqslant 0.$$

Пользуясь теоремой о среднем и неравенствами (5.6) и (5.7), получаем

$$f_i\left(P_i\tau x + Q_i \frac{1}{\tau} x\right) = \varphi_i(x) + \int_0^\tau \sum_{j\in G_i} \frac{\partial f_i\left(P_i t x + Q_i \frac{1}{t} x\right)}{\partial x_j} x_j dt -$$

$$-\int_0^\tau \frac{1}{\tau^2} \sum_{j\in H_i} \frac{\partial f_i\left(P_i t x + Q_i \frac{1}{t} x\right)}{\partial x_j} x_j dt =$$

$$= \varphi_i(x) + \tau \sum_{j\in G_i} \frac{\partial f_i\left(P_i\delta_1 x + Q_i \frac{1}{\delta_1} x\right)}{\partial x_j} x_j -$$

$$-\frac{\tau}{\delta_2^2} \sum_{j\in H_i} \frac{\partial f_i\left(P_i\delta_2 x + Q_i \frac{1}{\delta_2} x\right)}{\partial x_j} x_j >$$

$$> \tau \sum_{j\in G_i} \frac{\partial f_i\left(P_i\tau x + Q_i \frac{1}{\tau} x\right)}{\partial x_j} x_j -$$

$$-\frac{1}{\tau} \sum_{j\in H_i} \frac{\partial f_i\left(P_i\tau x + Q_i \frac{1}{\tau} x\right)}{\partial x_j} x_j.$$

К строгому неравенству здесь приводит следующее обстоятельство. Если множество $H_i$ не пусто, то второй интеграл отличен от нуля и под ним стоит строго возрастающая [в силу (5.7)] функция, поэтому $\delta_2 < \tau$, но тогда [опять в силу (5.7)] замена $\delta_2$ на $\tau$ приводит к строгому неравенству. Если же $H_i$ пусто, то $\varphi_i(x) = f_i(0) > 0$, поскольку $F(R^n_+) \subset \operatorname{int} R^n_+$, что снова дает строгое неравенство.

Используя полученное неравенство, приходим к выводу:

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial f_i\left(P_i\tau x + Q_i \frac{1}{\tau} x\right)}{\partial x_j}\right) = \frac{1}{\tau^2}\left\{\tau \sum_{j\in G_i} \frac{\partial f_i\left(P_i\tau x + Q_i \frac{1}{\tau} x\right)}{\partial x_j} x_j -\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\tau} \sum_{j\in H_i} \frac{\partial f_i\left(P_i\tau x + Q_i \frac{1}{\tau} x\right)}{\partial x_j} x_j - f_i\left(P_i\tau x + Q_i \frac{1}{\tau} x\right)\right\} < 0.$$

Следовательно, функция $\frac{1}{\tau} f_i\left(P_i\tau x + Q_i \frac{1}{\tau} x\right)$ [как функция скалярного аргумента $\tau \in (0, 1)$] строго убывает. Поэтому

$$\frac{1}{\tau} f_i \left( P_i \tau x + Q_i \frac{1}{\tau} x \right) > f_i(x). \ \blacktriangle$$

## § 6. Анализ рыночной модели

В этом параграфе мы проиллюстрируем некоторые возможности применения описанного выше аппарата. Модель рынка для этой цели — лишь удобный в силу своей популярности макет. Сама по себе она не лежит в основе наших интересов, и мы не будем стремиться при изложении результатов к достижению максимальной степени общности.

Рассмотрим простейший вариант постановки задачи, который уже обсуждался в главе I. На рынке имеется $n+1$ товаров, $x_i$ ($i=0, \ldots, n$) — цена на $i$-й товар, $\tilde{g}_i(x_0, x)$ — избыточный спрос на него, $x_0$ обозначает цену так называемого базисного товара, $x = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Таким образом, функции $\tilde{g}_i$ определены на неотрицательном ортанте $(n+1)$-мерного пространства. Мы будем предполагать, что все функции $\tilde{g}_i$ непрерывны и ограничены. Кроме того, предположим, что каждая функция $\tilde{g}_i$ строго убывает по «своей» переменной, т. е. при увеличении цены $x_i$ спрос на $i$-й товар падает. Функции избыточного спроса считаются положительно однородными нулевой степени *, т. е.

$$\tilde{g}_i(\lambda x_0, \lambda x) = \tilde{g}_i(x_0, x) \text{ при любом } \lambda > 0. \tag{6.1}$$

Система цен $\{x_0^*, x^*\}$ называется равновесной, если для всех $i=0, \ldots, n$ или $\tilde{g}_i(x_0^*, x^*) = 0$, или $x_i^* = 0$, $\tilde{g}_i(x_0^*, x^*) < 0$. Ясно, что любая точка $\{\lambda x_0^*, \lambda x^*\}$ будет при этом [в силу (6.1)] также равновесной, поэтому при изучении равновесия можно фиксировать цену одного из товаров. Для этой цели у нас «подготовлен» базисный товар, и мы будем полагать $x_0 = 1$, обозначая $\tilde{g}_i(1, x)$ через $g_i(x)$, т. е.

$$g_i(x) = \tilde{g}_i(1, x).$$

В экономических исследованиях обычно предполагается, что функции избыточного спроса удовлетворяют *закону Вальраса*

$$\sum_{i=0}^{n} x_i g_i(x_0, x) \equiv 0, \tag{6.2}$$

который представляет собой формализацию бюджетных ограничений.

---

* Грубо говоря, это следствие того очевидного факта, что избыточный спрос не меняется, если перейти от расчета в рублях к расчету в копейках.

В силу (6.2) базисный товар при изучении равновесия можно вообще исключить, держа в поле зрения лишь $n$ функций избыточного спроса $g_i(\boldsymbol{x})$, $i=1, \ldots, n$. Если $\boldsymbol{x}^*$ будет равновесием на таком «усеченном» рынке, то в силу (6.2) автоматически $\tilde{g}_0(1, \boldsymbol{x}^*)=0$.

Сделаем, наконец, последнее предположение. Будем считать, что на рынке нет свободных товаров (которые бы надо было «продавать» бесплатно), т. е. для всех $i=0, \ldots, n$

$$\tilde{g}_i(x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n)>0 \tag{6.3}$$

и $\tilde{g}_i$ отрицательны при достаточно больших $x_i$. Отсюда следует, что равновесной может быть лишь внутренняя точка неотрицательного ортанта.

Из оговоренных условий вытекает, что существует набор непрерывных строго положительных функций

$$\tilde{f}_i(x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)=\tilde{f}_i(x_0, \boldsymbol{x}),$$

которые мы будем называть текущими положениями целей, таких, что

$$\forall i: \tilde{g}_i(x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}, \tilde{f}_i(x_0, \boldsymbol{x}), x_{i+1}, \ldots, x_n)\equiv 0.$$

Заметим сразу, что из (6.1) и однозначности определения $\tilde{f}_i$ вытекает

$$\tilde{f}_i(\lambda x_0, \lambda \boldsymbol{x})=\lambda\tilde{f}_i(x_0, \boldsymbol{x}) \quad \text{при любом } \lambda>0, \tag{6.4}$$

т. е. $\tilde{f}_i$ — положительно однородные функции первой степени.

Очевидно, неподвижная точка оператора $F(\boldsymbol{x})$ с компонентами

$$f_i(\boldsymbol{x})=\tilde{f}_i(1, \boldsymbol{x}), \quad i=1, \ldots, n$$

равновесна. В дальнейшем нам будет удобнее оперировать именно с оператором $F(\boldsymbol{x})$.

В описанных предположениях (и даже в более слабых) рыночное равновесие всегда существует. Этот вопрос неоднократно рассматривался в литературе по математической экономике, и мы не будем на нем останавливаться (хотя это можно было бы достаточно просто сделать на основе теоремы 1.1) *. Нас будут интересовать условия единственности рыночного равновесия.

Рассмотрим сначала рынок с валовой заменимостью товаров, который характеризуется тем, что каждая функция избыточного спроса $\tilde{g}_i(x_0, \boldsymbol{x})$ не убывает по «чужим» переменным (по переменным $x_j$, $j\neq i$). Дополнительно предположим, что каждая функция $\tilde{g}_i$ $(i\neq 0)$ по $x_0$ не только не убывает, но строго возрастает. В этих условиях оператор $F(\boldsymbol{x})$, очевидно, монотонный (полуупорядоченность введена неотрицательным ортантом).

* См. также Дополнение II.

Теорема 6.1. *Рынок с валовой заменимостью товаров имеет единственное положение равновесия.*

Доказательство. В указанных предположениях $F(\operatorname{int} R^n_+) \subset \subset \operatorname{int} R^n_+$. Для любых $\tau \in (0, 1)$, $x \in \operatorname{int} R^n_+$ и $i = 1, \ldots, n$

$$f_i(\tau x) = \tilde{f}_i(1, \tau x) > \tilde{f}_i(\tau, \tau x) = \tau f_i(x).$$

Следовательно, монотонный оператор $F(x)$ вогнутый. Невозможность существования у него двух различных неподвижных точек вытекает из теоремы 4.2. ▲

Рассмотрим теперь рынок с валовой дополнительностью товаров. Все функции $\tilde{g}_i(x_0, x)$ по «чужим» переменным не возрастают, причем при $i \neq 0$ строго убывают по $x_0$.

Теорема 6.2. *Рынок с валовой дополнительностью товаров имеет единственное положение равновесия.*

Доказательство. Очевидно, оператор $F(x)$ — антимонотонный, и $F(\operatorname{int} R^n_+) \subset \operatorname{int} R^n_+$. Для любых $\tau \in (0, 1)$, $x \in \operatorname{int} R^n_+$ и $i = 1, \ldots, n$

$$f_i\left(\frac{1}{\tau} x\right) = \tilde{f}_i\left(1, \frac{1}{\tau} x\right) > \tilde{f}_i\left(\frac{1}{\tau}, \frac{1}{\tau} x\right) = \frac{1}{\tau} f_i(x) > \tau f_i(x).$$

Следовательно, $F(x)$ антивогнут. Остается применить теорему 4.2. ▲

Чтобы доказать единственность равновесия в общем случае смешанного рынка, нам потребуются дополнительные предположения. Поясним сначала, что мы понимаем под смешанным рынком. Смешанным мы называем такой рынок, на котором каждая функция избыточного спроса по каждой в отдельности цене или не убывает, или не возрастает [оператор $F(x)$ в этом случае гетерогенный]. Другими словами, товары на смешанном рынке могут находиться в одном из двух возможных отношений: валовой заменимости или валовой дополнительности. Координаты вектора $x$, по которым $\tilde{g}_i(x_0, x)$ возрастает, будем называть $P$-переменными, по которым убывает — $Q$-переменными. Содержательно наше предположение будет заключаться в том, что каждая функция $\tilde{g}_i(x_0, x)$ $(i = 1, \ldots, n)$ по $x_0$ растет гораздо быстрее, чем убывает по $Q$-переменным. Более точно:

Условие $Q^0$. Если $x_0$ увеличить в $\alpha$ раз $(\alpha > 1)$, а $Q$-переменные функции $\tilde{g}_i$ — в $\alpha^2$ раз, то избыточный спрос $\tilde{g}_i$ строго возрастает.

Теорема 6.3. *Если справедливо $Q^0$, то смешанный рынок имеет единственное положение равновесия.*

Доказательство вытекает из гетерогенности $F(x)$ и справедливости для любых $\tau \in (0, 1)$, $x \in \operatorname{int} R^n_+$, $i = 1, \ldots, n$ неравенства

$$f_i\left(P_i \tau x + Q_i \frac{1}{\tau} x\right) = \tilde{f}_i\left(1, P_i \tau x + Q_i \frac{1}{\tau} x\right) > \tilde{f}_i(\tau, \tau x) = \tau f_i(x),$$

которое влечет за собой псевдовогнутость $F(x)$. ▲

Глава четвертая

# РЕАКЦИЯ СИСТЕМ НА ВНЕШНИЕ ВОЗДЕЙСТВИЯ

Занимаясь вопросами существования, единственности и устойчивости равновесия, мы стоим, по существу, на созерцательных позициях, пытаясь понять, как функционирует или будет функционировать изучаемая система. Правда, эта задача служит не только для удовлетворения любопытства, но имеет и серьезные прикладные аспекты. Тем не менее нужно иметь в виду, что конечной целью все же, как правило, является некая нормативная задача, заключающаяся в выяснении возможностей управления системой (возможностей ее перевода в более благоприятное состояние, перевода на более выгодный режим работы и т. п.).

В тех случаях, когда система имеет точное количественное описание, такая задача может быть трудной с технической (вычислительной) точки зрения, но не с принципиальной. Если же известны лишь качественные характеристики системы, то здесь зачастую появляются и принципиальные затруднения. Разрешимым приходится считать тот случай, когда есть возможность ответить на вопрос: как качественно влияют внешние воздействия (управления) на состояние системы? Подобный круг вопросов получил название задач сравнительной статики и традиционно связывался с изучением моделей рынка и межотраслевого баланса. Формулировка и решение задач сравнительной статики не зависят от конкретного подтекста: выясняется характер реакций системы на управления или же на стихийные воздействия.

Несмотря на то, что о формальной постановке задач сравнительной статики уже вскользь упоминалось в главе I, в первом параграфе мы дадим несколько содержательных примеров и только после этого перейдем к изложению результатов.

## § 1. Задачи сравнительной статики

1. Межотраслевой баланс. Пусть $i$-я отрасль выпускает $i$-й продукт в количестве $x_i$ и на выпуск единицы этого продукта расходует $a_{ji}$ единиц $j$-го продукта. Чистый выпуск $i$-го продукта при этом равен

$$y_i = x_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j,$$

Затраты в системе могут быть и нелинейными. Пусть при производстве вектора $\boldsymbol{x}$ $i$-й продукт внутри системы расходуется в количестве $p_i(x_1, \ldots, x_n)$. Чистые выпуски при этом равны

$$y_i = x_i - p_i(\boldsymbol{x}).$$

Здесь естественно поставить следующие вопросы. Увеличиваются ли чистые выпуски при увеличении $\boldsymbol{x}$? Какой из чистых выпусков сильней изменится при увеличении $x_{i_0}$? Или в более естественном порядке: что нужно делать, чтобы достичь увеличения чистых выпусков? Если нужно увеличить $y_{i_0}$, то какой из производственных планов придется больше всего изменить?

Эти вопросы отнюдь не банальны, и ответы на них имеют очевидную практическую ценность. Даже в тех случаях, когда есть точное количественное описание всех функций $p_i(\boldsymbol{x})$, задача увеличения чистых выпусков при больших размерностях может не поддаваться количественному расчету.

2. Для рыночной модели также можно ставить близкие по характеру вопросы. Как меняются равновесные цены при направленном изменении избыточных спросов? Какая из цен меняется в большей степени? Что будет, если часть цен искусственно «заморозить»?

Если при этом считать, что $i$-й спрос изменяется в $\mu_i$ раз, то задача будет конечнопараметрической, как и предыдущая. Однако спрос на рынке есть функция, которая может увеличиваться или уменьшаться, деформируясь, и тогда задача, по существу, будет бесконечномерной.

3. Пусть некоторая изолированная система биологических популяций находится в равновесии (глава I, § 2), определяемом из условия $\forall i: N_i = f_i(\boldsymbol{N})$. Если $i$-й вид мы начинаем эксплуатировать в количестве $\varepsilon_i$, то новое равновесие определится условием $\forall i: N_i = f_i(\boldsymbol{N}) - \varepsilon_i$ или же условием $\forall i: N_i = (1-\delta_i) f_i(\boldsymbol{N})$, если фиксируется доля (процент) эксплуатации $\delta_i$. Задачи сравнительной статики здесь опять относятся к выяснению характера реакций системы (характера изменения положения равновесия). Естественным представляется тот случай, когда равновесные численности «отстреливаемых» видов уменьшаются, и это не приводит к «неожиданным последствиям» для других видов. Однако известно, что «неожиданные эффекты» в биологических системах обнаруживаются довольно часто.

4. Рассмотрим пример из области медицины. Пусть имеется набор $n$ лекарств (через $x_i$ будем обозначать количество $i$-го лекарства) и набор $n$ физиологических показателей состояния организма ($i$-й показатель будем характеризовать величиной $y_i$). Пусть $i$-е лекарство предназначено для изменения (лечения) $i$-го показателя. В идеальном случае $\forall i: y_i = f_i(x_i)$ процедура лечения была бы весьма простой. Однако каждое лекарство, как правило, обладает побочным влиянием (чаще всего вред-

ным), и мы имеем

$$\forall i: y_i = f_i(x_1, \ldots, x_n).$$

Понятно, что процедура лечения в этом случае должна быть комплексной, и не всегда ясно, можно ли обойтись заданным набором лекарств, чтобы улучшить состояние хотя бы одного показателя, не ухудшая остальных. Ведь применяя $x_1$ для улучшения $y_1$, мы можем пагубно повлиять на $y_2$, и тогда придется применять $x_2$, что приведет к ухудшению $y_1$ и $y_3$, а после увеличения дозы $x_1$ и применения $x_3$ процедура может продолжаться до тех пор, пока организм не перейдет в состояние, в котором лекарства уже не нужны.

Итак, задача здесь состоит в выяснении возможности улучшения одного или нескольких показателей с помощью заданного набора лекарств. Для этого надо изучить характер реакций организма на применение различных подгрупп лекарств.

5. Рассмотрим, наконец, задачу, в основе которой лежат оптимизационные соображения. Пусть некоторая фирма закупает набор ресурсов $\boldsymbol{x} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ по внешним ценам $\lambda = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$. Для реализации стоящего перед фирмой плана необходимо $\boldsymbol{x} \in X$, и фирма решает экстремальную задачу: минимизирует затраты $(\boldsymbol{x}, \lambda)$ при ограничении $\boldsymbol{x} \in X$. Возникает закономерный вопрос: как изменение цен влияет на закупки сырья?

## § 2. Законы Хикса и принцип Ле-Шателье — Самуэльсона

Основным объектом в исследованиях экономистов по задачам сравнительной статики была модель рынка с валовой заменимостью товаров. Нам удобно будет рассматривать эту модель в том виде, в каком она была описана в § 6 главы III, где мы установили, что при валовой заменимости товаров оператор $F(\boldsymbol{x})$— монотонный и вогнутый. В дальнейшем будут использоваться только эти свойства оператора $F(\boldsymbol{x})$, поэтому все результаты могут быть перенесены на любую другую систему, оператор межэлементных связей которой монотонен и вогнут. Правда, при этом неявно будет присутствовать предположение о существовании равновесия, что в случае рыночной модели обеспечивается некими другими условиями (см. главу III, § 6).

Лемма 2.1. *Пусть монотонный вогнутый оператор $F(\boldsymbol{x})$ имеет неподвижную точку $\boldsymbol{x}^* \in \operatorname{int} R^n_+$ и $F(\boldsymbol{x}^0) \geqslant \boldsymbol{x}^0$; тогда $\boldsymbol{x}^* \geqslant \boldsymbol{x}^0$.*

Установим сначала справедливость следующего утверждения: если на инвариантном конусном отрезке $\langle v^0, w^0 \rangle$ непрерывный монотонный оператор $F(\boldsymbol{x})$ имеет единственную неподвижную точку $\boldsymbol{x}^*$ и $F(\boldsymbol{x}^0) \geqslant \boldsymbol{x}^0$, где $\boldsymbol{x}^0 \in \langle v^0, w^0 \rangle$, то $\boldsymbol{x}^* \geqslant \boldsymbol{x}^0$.

Рассмотрим последовательность $x^k=F(x^{k-1})$, начинающуюся в точке $x^0$. В силу $F(x^0)\geqslant x^0$ и монотонности $F$

$$x^0\leqslant x^1\leqslant \ldots \leqslant x^k\leqslant \ldots \leqslant w^0.$$

Монотонная ограниченная последовательность имеет предел *, который в силу непрерывности $F$ является неподвижной точкой $F$. Но поскольку неподвижная точка у $F$ единственна, то $x^k\to x^*$ и $x^0\leqslant x^*$.

Чтобы перейти к общему утверждению, достаточно заметить, что у вогнутого оператора $F$, имеющего неподвижную точку $x^*$, всегда существует «сколь угодно большой» инвариантный конусный отрезок, включающий любую наперед заданную точку $x^0\in\operatorname{int} R^n_+$. Таким конусным отрезком является (теорема 4.1 в главе III)

$$\langle v^0, w^0\rangle=\left\langle \tau x^*, \frac{1}{\tau}x^*\right\rangle$$

при достаточном малом $\tau\in(0, 1)$. ▲

Перейдем теперь к изложению законов сравнительной статики для рыночной модели с валовой заменимостью товаров.

Теорема 2.1. *Пусть $x^*$ — равновесный набор цен на рынке, а $\bar{x}^*$ — равновесный набор цен после увеличения спроса**, скажем, на первый товар. Тогда $\bar{x}^*\geqslant x^*$, причем $\bar{x}_1^*>x_1^*$.*

Последняя часть утверждения представляет собой первый закон Хикса, а первая — второй. Доказательство элементарно. Пусть оператор $\bar{F}(x)$ описывает рынок после увеличения спроса, тогда, очевидно, $\bar{F}(x)\geqslant F(x)$ при любом $x\in\operatorname{int}R^n_+$. Следовательно, $\bar{F}(x^*)\geqslant F(x^*)=x^*$ и по лемме 2.1 $\bar{x}^*\geqslant x^*$. Из доказательства леммы 2.1 легко видеть также, что $\bar{x}_1^*>x_1^*$, так как именно $\bar{f}_1(x)>f_1(x)$. ▲

Теорема 2.2 (*третий закон Хикса*). *В условиях теоремы 2.1 возрастание равновесной цены первого товара в процентном отношении больше, чем любой другой.*

Допустим противное, например $\dfrac{\bar{x}_n^*}{x_n^*}\geqslant\dfrac{\bar{x}_j^*}{x_j^*}$ $(j\neq n)$. В этом случае

$$x^*\geqslant\frac{x_n^*}{\bar{x}_n^*}\bar{x}^*,$$

---

* Этот факт легко установить на основе аналогичного утверждения для скалярных последовательностей (учитывая, что полуупорядоченность введена неотрицательным ортантом). Он остается верным и в случае произвольного конуса $K\subset R^n$. В бесконечномерных пространствах это не всегда так.

** Под увеличением спроса подразумевается замена функции избыточного спроса $g_i(x)$ на $\bar{g}_i(x)$, где $\bar{g}_i(x)\geqslant g_i(x)$ при любом $x$.

причем по теореме 2.1 $\frac{\overset{*}{x}_n}{\overset{=*}{x}_n} \in (0, 1)$. Но тогда

$$\overset{*}{x}_n = f_n(x^*) \geqslant f_n\left(\frac{\overset{*}{x}_n}{\overset{=*}{x}_n}\bar{x}^*\right) > \frac{\overset{*}{x}_n}{\overset{=*}{x}_n} f_n(\bar{x}^*) = \overset{*}{x}_n,$$

что противоречиво. ▲

Теорема. 2.3 (*принцип Ле-Шателье — Самуэльсона*). *Пусть при увеличении спроса на некоторые товары положение равновесия рынка переходит из* $x^*$ *в* $\bar{x}^*$. *Пусть при таком же увеличении спроса часть цен поддерживается на прежнем уровне (искусственно или в результате приспособления предложений), и рынок переходит в положение равновесия* $\tilde{x}^*$; *тогда* $\tilde{x}^* \leqslant \bar{x}^*$.

Доказательство. Пусть для определенности на прежнем уровне поддерживаются цены товаров с номерами $j = m+1, \ldots, n$ $(m < n)$. Введем в рассмотрение оператор $\tilde{F}_{x^*} : R_+^m \to R_+^m$ с компонентами $(x \in R^m)$

$$\tilde{f}_i(x) = \bar{f}_i(x_1, \ldots, x_m, \overset{*}{x}_{m+1}, \ldots, \overset{*}{x}_n),\ i = 1, \ldots, m.$$

Очевидно, оператор $\tilde{F}_{x^*}$ — монотонный, а также вогнутый, так как для $\tau \in (0, 1)$

$$\bar{f}_i(\tau x_1, \ldots, \tau x_m, \overset{*}{x}_{m+1}, \ldots, \overset{*}{x}_n) \geqslant \bar{f}_i(\tau x_1, \ldots, \tau x_m, \tau\overset{*}{x}_{m+1}, \ldots$$
$$\ldots, \tau\overset{*}{x}_n) > \tau\bar{f}_i(x_1, \ldots, x_m, \overset{*}{x}_{m+1}, \ldots \overset{*}{x}_n).$$

Легко видеть, что вектор, состоящий из первых компонент вектора $\tilde{x}^*$, — неподвижная точка оператора $\tilde{F}_{x^*}$, а вектор, состоящий из первых компонент вектора $\bar{x}^*$, — неподвижная точка оператора $\tilde{F}_{\bar{x}^*}$. Поскольку $\tilde{F}_{\bar{x}^*}(x) \geqslant \tilde{F}_{x^*}(x)$, то по лемме 2.1 $\tilde{x}^* \leqslant \bar{x}^*$. ▲

С тем же успехом приведенные теоремы могут быть применены для нелинейной модели межотраслевого баланса (§ 1), если только оператор $P(x) = \{p_1(x), \ldots, p_n(x)\}$ — монотонный и вогнутый. Надо будет лишь заменить в формулировках увеличение спросов увеличением чистых выпусков и несколько изменить трактовку. Перечислим соответствующие утверждения:

1) если мы хотим увеличить чистые выпуски *, то все производственные планы придется увеличивать (не уменьшать);

2) если мы хотим увеличить чистый выпуск $y_{i_0}$, то в процентном отношении в наибольшей степени придется увеличить $x_{i_0}$;

3) если мы хотим увеличить чистые выпуски, то, поддерживая часть производственных планов на прежнем уровне (путем

* Везде далее, где речь идет об увеличении чистых выпусков, подразумевается, что такое увеличение принципиально возможно, т. е. модель предполагается продуктовой.

внешних закупок), результата можно достичь меньшим увеличением остальных планов, чем в случае, когда внутрисистемное потребление не компенсируется извне.

## § 3. Реакция гетеротонных систем

Действие только что рассмотренных законов сравнительной статики, вообще говоря, не распространяется на общий случай смешанных рынков. Тем не менее и в общем случае можно сделать некоторые содержательные утверждения о характере зависимости положения равновесия от изменения спроса. Правда, мы больше не будем считать, что речь обязательно идет о рынке, а будем рассматривать некую абстрактную систему с оператором межэлементных связей $F(\boldsymbol{x})$, который предполагается гетеротонным и псевдовогнутым.

Мы ограничимся также конечномерным вариантом постановки задачи. Если раньше компоненты оператора $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$ могли произвольно «увеличиваться» или «уменьшаться», то теперь мы будем считать, что функции $f_i(\boldsymbol{x})$ меняются «пропорционально», т. е. в «измененной» системе оператор межэлементных связей $\overline{F}(x)$ имеет компоненты $\overline{f}_i(\boldsymbol{x})=\mu_i f_i(\boldsymbol{x})$ $(\mu_i>0)$. Если ввести обозначения $\lambda_i=1/\mu_i$, $\Lambda=\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, то наша задача будет состоять в изучении уравнения

$$F(\boldsymbol{x})=\Lambda\boldsymbol{x}, \tag{3.1}$$

точнее, в выяснении характера зависимости решения (3.1) от $\Lambda$.

В частном случае $\forall i: \lambda_i=\lambda$ уравнение (3.1) переходит в

$$F(\boldsymbol{x})=\lambda\boldsymbol{x}, \tag{3.2}$$

и новое положение равновесия в системе будет собственным вектором оператора $F(\boldsymbol{x})$, отвечающим собственному числу $\lambda$.

Очевидно, оператор $\Lambda^{-1}F$ также псевдовогнутый, поэтому (3.1) на $\mathrm{int}\, R^n_+$ не может иметь более одного решения при любом $\Lambda$ $(\lambda_i>0)$. Если (3.1) имеет решение при некотором $\Lambda$, то в силу псевдовогнутости $F$ оно имеет решение и при любом $\Lambda+\Delta\Lambda$, если только $\Delta\Lambda$ достаточно мало по норме (см. главу III, § 4). Следовательно, в том случае, когда исходная система имеет положение равновесия, т. е. существует неподвижная точка у оператора $F$, мы всегда имеем возможность слабо «шевелить» систему, не нарушая условий существования равновесия. Последующие результаты о характере смещения положения равновесия, однако, не зависят от предположения о малости «шевелений» (о малости приращений $\Delta\Lambda$), если только считать, что «деформированная» система также имеет положение равновесия. Поэтому возможны две интерпретации приводимых далее утверждений. Можно предполагать, что равновесие существует лишь у исходной системы, но тогда надо считать, что $\Delta\Lambda$ достаточно малы по норме. Если же предполагать существование решения (3.1) при любом $\Lambda(\lambda_i>0)$, то на $\Delta\Lambda$ нет необходимости вводить ограничения.

Последний случай, кстати, вовсе не экзотический, и существование решения (3.1) при любом $\Lambda$ можно обосновать почти без введения дополнительных требований. Эта задача лежит несколько в стороне от намеченной цели, и мы не будем ею заниматься. Укажем лишь один простой выход, состоящий в предположении, что оператор $F$ псевдовогнут «с запасом» (удовлетворяет условиям теоремы 4.5 в главе III). В этом случае при любом $\Lambda$ оператор $\Lambda^{-1}F$ также псевдовогнут «с запасом» и по теореме 4.5 в главе III имеет единственную неподвижную точку.

Будем писать $\Lambda_1 \prec \Lambda_2$, если

$$\forall i: \lambda_{i1} \leqslant \lambda_{i2} \text{ и } \exists i: \lambda_{i1} < \lambda_{i2}.$$

Через $x(\Lambda)$ обозначается решение уравнения (3.1). Заметим, что зависимость $x(\Lambda)$ непрерывна (см. обсуждение теоремы 4.1 в главе III).

Теорема 3.1. *Пусть* $\Lambda_1 \prec \Lambda_2$ *и* $x_1 = x(\Lambda_1)$, $x_2 = x(\Lambda_2)$; *тогда* $x_1 \overline{\leqslant} x_2$.

Доказательство. Предположим противное, т. е. что $x_1 \leqslant x_2$. Выберем максимальное $\alpha$, при котором $x_1 \geqslant \alpha x_2$. Пусть $\lambda_{j1} < \lambda_{j2}$, тогда *

$$x_{j1} = \lambda_{j1}^{-1} \hat{f}_j(x_1, x_1) \geqslant \lambda_{j1}^{-1} \hat{f}_j\left(\alpha x_2, \frac{1}{\alpha} x_2\right) >$$

$$> \alpha \lambda_{j1}^{-1} \lambda_{j2} \hat{f}_j(x_2, x_2) = \alpha \lambda_{j1}^{-1} \lambda_{j2} x_{j2}.$$

Но это противоречит способу выбора $\alpha$. ▲

Для удобства изложения $x_i$ будем называть усилием $i$-го элемента, а при переходе от оператора $F(x)$ к оператору $\bar{F}(x)$ с компонентами

$$\bar{f}_i(x) = (1 + \varepsilon_i) f_i(x)$$

будем говорить, что $i$-й результат увеличивается (растет), если $\varepsilon_i > 0$ (и убывает, если $\varepsilon_i < 0$).

Теорема 3.1 утверждает, таким образом, что увеличению всех или части результатов может соответствовать лишь такое изменение усилий, при котором хотя бы одно усилие возрастает.

Для дальнейших целей нам потребуется более детальная информация. Нас будет интересовать более определенный ответ на вопрос: какое именно равновесное усилие возрастает? Попутно мы получим аналог третьего закона Хикса.

Теорема 3.2. *Если некоторое изменение усилий приводит к возрастанию лишь $j$-го результата, то при этом $j$-е усилие воз-*

---

* Напомним, что $\hat{f}_j$ обозначает $j$-ю компоненту сопутствующего оператора (см. предыдущую главу).

*растает, причем в процентном отношении оно изменяется больше, чем любое другое.*

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что положение равновесия исходной системы находится в точке $x^*=1=\{1, \ldots, 1\}$ (этого всегда можно добиться растяжением и сжатием осей координат — переходом к другим масштабам, что не нарушает свойств гетеротонности и псевдовогнутости системы). Пусть $\tilde{x}$ — новое положение равновесия. Введем обозначения:

$$\alpha=\min_i \tilde{x}_i; \qquad \beta=\max_i \tilde{x}_i.$$

В силу теоремы 3.1 возможны два варианта: 1) $\alpha\geqslant 1$, $\beta>1$; 2) $\alpha<1$, $\beta>1$. Ограничимся анализом второго случая (первый рассматривается совсем просто).

Пусть для определенности $\tilde{x}_1=\alpha$, $\tilde{x}_n=\beta$ и

$$\gamma=\min\left(\tilde{x}_1, \frac{1}{\tilde{x}_n}\right), \qquad \xi=\max\left(\frac{1}{\tilde{x}_1}, \tilde{x}_n\right).$$

Очевидно,

$$1=f_n(1)\geqslant \hat{f}_n\left(\gamma\tilde{x}, \frac{1}{\gamma}\tilde{x}\right)>\gamma\tilde{x}_n; \tag{3.3}$$

$$1=f_1(1)\leqslant \hat{f}_1\left(\xi\tilde{x}, \frac{1}{\xi}\tilde{x}\right)<\frac{1}{\xi}\tilde{x}_1. \tag{3.4}$$

Если $\gamma=1/\tilde{x}_n$, то противоречиво (3.3), если $\xi=1/\tilde{x}_1$, то противоречиво (3.4).

Пусть тогда $\tilde{x}_j=\alpha$. Если по-прежнему $\gamma=\min(\tilde{x}_j, 1/\tilde{x}_n)=1/\tilde{x}_n$, то противоречивым остается (3.3). Остается возможность $\max(\tilde{x}_n, 1/\tilde{x}_j)=1/\tilde{x}_j$, но тогда снова получается противоречие

$$1=f_j(1)\leqslant \hat{f}_j\left(\frac{1}{\tilde{x}_j}\tilde{x}, \tilde{x}_j\tilde{x}\right)<\frac{1}{\tilde{x}_j}\frac{1}{1+\varepsilon_i}\tilde{x}_j=\frac{1}{1+\varepsilon_i}. \tag{3.5}$$

Итак, $\tilde{x}_j=\beta$. Выкладка (3.5) исключает также случай $\tilde{x}_j=\beta\leqslant\alpha$. ▲

Незначительным изменением хода рассуждений можно установить справедливость следующего более общего факта.

Теорема 3.3. *Пусть некоторое изменение усилий приводит к возрастанию результатов с индексами из $G\subset I=\{i=1, \ldots, n\}$, т. е. $\varepsilon_i>0$ при $i\in G$ и $\varepsilon_i=0$ при $i\notin G$. Тогда найдется усилие с номером $j\in G$, которое строго возрастает, причем в процентном отношении оно изменяется больше, чем любое другое с номером $i\notin G$, и не меньше, чем любое другое с номером $i\in G$.* ▲

Здесь возникает интересный вопрос: нельзя ли на основе этой теоремы утверждать, что всегда можно так подобрать пропорции роста результатов, чтобы этому соответствовало увеличение всех усилий? Положительный ответ на этот вопрос будет дан в следующем параграфе. Пока же отметим один частный случай, в котором такие пропорции легко указать непосредственно.

Теорема 3.4. *Пусть оператор межэлементных связей $F(x)$ — антимонотонный и антивогнутый. Пусть $F(x_1)=x_1$, $(1+\varepsilon)\times\times F(x_2)=x_2$, где $\varepsilon>0$. Тогда $x_2\geqslant x_1$.*

Таким образом, если все цели возрастают в одинаковое число раз, то равновесные усилия в «антивогнутой» системе не убывают. Перейдем к доказательству.

Выберем максимальное $\alpha$, при котором $x_2\geqslant\alpha x_1$. В предположении противного $\alpha<1$. Выберем максимальное $\beta$, при котором $x_1\geqslant\beta x_2$. В случае $\alpha\leqslant\beta$

$$x_2=(1+\varepsilon)F(x_2)\geqslant(1+\varepsilon)F\left(\frac{1}{\alpha}x_1\right)\geqslant(1+\varepsilon)\alpha x_1,$$

что противоречит способу выбора $\alpha$.

Пусть теперь $\beta<\alpha<1$. С одной стороны,

$$x_2=(1+\varepsilon)F(x_2)\geqslant(1+\varepsilon)F\left(\frac{1}{\beta}x_1\right)>(1+\varepsilon)\beta x_1,$$

откуда $\alpha>(1+\varepsilon)\beta$, с другой —

$$x_1=F(x_1)\geqslant F\left(\frac{1}{\alpha}x_2\right)>\frac{\alpha}{1+\varepsilon}x_2,$$

откуда $\beta>\alpha/(1+\varepsilon)$, т. е. $\alpha<(1+\varepsilon)\beta$. Полученное противоречие приводит к выводу $\alpha\geqslant 1$. ▲

## § 4. Нелинейные *P*-системы

Назовем переменные $x_i$ *действиями*, а $y_i=f_i(x)$ *результатами* $(i=1,\ \ldots,\ n)$. Пусть $x=0$ соответствуют «нулевые результаты», т. е. $f_i(0)=0$ $(i=1,\ \ldots,\ n)$, а при любом $x_j>0$

$$y_j=f_j(0,\ \ldots,\ 0,\ x_j,\ 0,\ \ldots,\ 0)>0,$$

т. е. «при отсутствии помех» каждое положительное действие $x_j$ приводит к положительному результату $y_j$.

Понятно, что при наличии межэлементных взаимосвязей совместные положительные (стереотипные) действия могут приводить к отрицательным результатам. Мы выделим класс натуральных систем ($P$-систем), в которых любой набор неотрицательных действий $(x\neq 0)$ дает хотя бы один положительный результат. Далее будет установлено, что в натуральной системе всегда существует согласованный набор действий, при котором все результаты положительны.

Дадим точное определение.

*Непрерывный оператор $F(x)=\{f_1(x),\ \ldots,\ f_n(x)\}$, действующий из $R^n_+$ в $R^n$ и удовлетворяющий условию $F(0)=0$, назовем $P$-отображением, если для любого $x\geqslant 0$ $(x\neq 0)$ существует номер $j$ такой, что $x_jf_j(x)>0$.*

В предыдущем параграфе, по существу, было установлено (теорема 3.3), что зависимость положения равновесия любой «псевдовогнутой» системы от внешних воздействий (от вектора $\varepsilon \geqslant 0$) описывается $P$-отображением. В этом плане можно рассматривать и другие задачи, не связанные с понятием состояния равновесия. Так, в модели лечения больного (§ 1) также можно говорить о наличии у системы «$P$-свойства»: применение любой подгруппы лекарств приводит к улучшению хотя бы одного физиологического показателя (с номером из той же подгруппы). О наличии или отсутствии у системы «$P$-свойства» может идти речь при рассмотрении модели межотраслевого баланса, модели сосуществования биологических видов и т. п.

При анализе сложных систем в большинстве случаев мы располагаем лишь качественным описанием систем, и может показаться, что проверка натуральности системы — безнадежное дело. Теорема 3.3 показывает, что это не так, и в достаточно общих предположениях необходимый вывод часто можно сделать на основе лишь качественного анализа. Иногда наличие у системы «$P$-свойства» может быть установлено на основе физических соображений. Рассмотрим для примера следующую модель. К общей водопроводной трубе подключены $n$ душевых колонок, каждая со своим регулятором. Пусть положение $i$-го регулятора описывается переменной $x_i$, а поток воды из $i$-й колонки — переменной $y_i$. Изменение положения каждого регулятора $x_i$ влияет не только на собственную переменную $y_i$, но и на другие, так как меняет давление в общем трубопроводе. Таким образом, $y_i = f_i(x_1, \ldots, x_n)$. Оператор $F$ в этом случае заведомо является $P$-отображением по следующей причине. Если некоторые (или все) $x_i$ увеличить (открыть краны еще больше), то суммарный поток воды из колонок возрастет, поэтому возрастет хотя бы одно $y_i$. Аналогичное соображение оказывается эффективным каждый раз, когда действия $x_i$ элементов системы направлены на привлечение в систему извне некоторого ресурса.

Теорема 4.1. *Пусть $F$ является $P$-отображением; тогда существует вектор $x \geqslant 0$ такой, что $f_i(x) > 0$ для всех $i = 1, \ldots, n$.*

Доказательство. Обозначим через $\overline{\Omega}$ множество тех $x \in R^n_+$, для которых $0 < r \leqslant \|x\| \leqslant R$. Границу $\Gamma$ области $\Omega$ разобьем на три куска: $\Gamma_r$ — множество тех $x \in \Gamma$, для которых $\|x\| = r$; $\Gamma_R$ определяется аналогично; $\Gamma_0$ — множество тех $x \in \Gamma$, которые принадлежат границе конуса $R^n_+$. Без ограничения общности будем считать $r < 1 < R$.

Если мы установим существование такого $x \in R^n_+$, при котором $\tilde{F}(x) = 1$, где $1 = \{1, \ldots, 1\}$,

$$\tilde{F}(x) = \|x\| F\left(\frac{x}{\|x\|}\right), \tag{4.1}$$

то теорема очевидным образом будет доказана.

Предположим, что утверждение теоремы неверно. В этом случае ни одну ненулевую точку $x \in R_+^n$ оператор $\widetilde{F}$ не переводит во внутреннюю точку $R_+^n$.

Покажем, что тогда (при достаточно малом $r$ и достаточно большом $R$) векторное поле $\widetilde{F}(x)-1$ на $\Gamma$ гомотопно полю

$$\Phi(x)-1=\{x_1\widetilde{f}_1(x)-1, \ \ldots, \ x_n\widetilde{f}_n(x)-1\}.$$

Эти поля связывает линейная гомотопия

$$H(x, \lambda)=\lambda\widetilde{F}(x)+(1-\lambda)\Phi(x)-1.$$

Невырожденность $H(x, \lambda)$ на $\Gamma_0$ очевидна *. Для установления невырожденности $H(x, \lambda)$ на $\Gamma_r$ и $\Gamma_R$ введем в рассмотрение функцию

$$\varphi(x, \lambda)=\max_i\,[\lambda\widetilde{f}_i(x)+(1-\lambda)x_i\widetilde{f}_i(x)].$$

Функция $\varphi(x, \lambda)$ непрерывна по совокупности переменных ($\lambda \in [0, 1]$, $x \in R_+^n$), строго положительна при любых $\lambda \in [0, 1]$, $x \in R_+^n$, $\|x\|=1$ и поэтому

$$\min\{\varphi(x, \lambda): \lambda \in [0, 1], \ x \in R_+^n, \ \|x\|=1\}=\mu>0;$$

$$\max\{\varphi(x, \lambda): \lambda \in [0, 1], \ x \in R_+^n, \ \|x\|=1\}=M>0.$$

Поскольку функции $\widetilde{f}_i(x)$ положительно однородны первой степени, то в случае $R>\frac{1}{\mu}$ $(R>1)$ для любых $x \in \Gamma_R$, $\lambda \in [0, 1]$ всегда найдется индекс $j$ такой, что

$$\lambda\widetilde{f}_j(x)+(1-\lambda)x_j\widetilde{f}_j(x)\geqslant R\mu>1.$$

Следовательно, при любом $\lambda \in [0, 1]$ поле $H(x, \lambda)$ невырожденно на $\Gamma_R$ (если только $R$ достаточно велико). Точно так же устанавливается невырожденность $H(x, \lambda)$ на $\Gamma_r$ при $r<1/M$ $(r<1)$.

Аналогично доказывается гомотопность полей $\Phi(x)-1$ и $x-1$. Гомотопией будет

$$H_1(x, \lambda)=\lambda x+(1-\lambda)\Phi(x)-1.$$

---

* Нашей конечной целью является установление гомотопности на $\Gamma$ полей $F(x)-1$ и $x-1$. Использование промежуточного поля $\Phi(x)-1$ как раз дает возможность применить на $\Gamma_0$ линейную гомотопию, которая при непосредственном сравнении полей $F(x)-1$ и $x-1$ не проходит.

Невырожденность $H(x, \lambda)$ на $\Gamma_0$ вытекает из следующих соображений. По предположению, $F(x) \notin \operatorname{int} R_+^n$ для любой ненулевой точки $x \in R_+^n$. Поэтому для любого $x \in \Gamma_0$ найдется номер $j$ такой, что $f_j(x) \leqslant 0$. Но тогда

$h_j(x, \lambda)=\widetilde{f}_j(x)[\lambda+(1-\lambda)x_j]-1<0$ при любом $\lambda \in [0,1]$.

Вместо $\varphi(\boldsymbol{x}, \lambda)$ надо рассмотреть функцию

$$\psi(\boldsymbol{x}, \lambda) = \max_i [\lambda x_i + (1-\lambda) x_i \widetilde{f}_i(\boldsymbol{x})].$$

Поскольку гомотопность представляет собой отношение эквивалентности, то поля $\widetilde{F}(\boldsymbol{x}) - 1$ и $\boldsymbol{x} - 1$ гомотопны на Г. Но вращение поля $\boldsymbol{x} - 1$ на Г равно единице ($r$ достаточно мало, а $R$ достаточно велико); следовательно, существует $\boldsymbol{x} \in \Omega$, для которого $\widetilde{F}(\boldsymbol{x}) - 1 = 0$, что противоречит предположению. ▲

При доказательстве теоремы 4.1 можно рассуждать не от противного, а действительно устанавливать гомотопность полей $\widetilde{F}(\boldsymbol{x}) - 1$ и $\boldsymbol{x} - 1$, если исключить из рассмотрения тот случай, когда некоторые из граничных точек $R_+^n$ переводятся оператором $F$ внутрь $R_+^n$ (и вывод теоремы 4.1 заведомо справедлив). Такой случай, например, в модели лечения больного можно интерпретировать как избыточность набора лекарств: строгого улучшения всех показателей можно добиться, не используя всех лекарств. Термин «избыточность набора переменных» мы и резервируем для обозначения описанной ситуации. В качестве примера, где набор переменных заведомо неизбыточен, можно указать нелинейную модель межотраслевого баланса.

Теорема 4.2. *Пусть $F: R_+^n \to R^n$ является Р-отображением, и набор переменных $\boldsymbol{x}$ неизбыточен. Тогда для любого $\boldsymbol{y} \in \operatorname{int} R_+^n$ существует вектор $\boldsymbol{x} \in \operatorname{int} R_+^n$ (с любой наперед заданной нормой $\|\boldsymbol{x}\| = \alpha > 0$) такой, что $F(\boldsymbol{x}) = \lambda \boldsymbol{y}$ при некотором $\lambda > 0$.*

Другими словами, в условиях теоремы 4.2 всегда можно добиться роста результатов в любых заданных пропорциях (добиться, чтобы векторный результат лежал на любом наперед заданном луче, лежащем в $\operatorname{int} R_+^n$).

Для доказательства достаточно видоизменить лишь некоторые детали в предыдущих рассуждениях. В доказательстве теоремы 4.1 вместо 1 с равным успехом можно использовать любую другую внутреннюю точку $R_+^n$ (при этом меняются только оценки для $r$ и $R$). Следовательно, для любого $\boldsymbol{y} \in \operatorname{int} R_+^n$ существует такой вектор $\boldsymbol{x} \in \operatorname{int} R_+^n$, что $\|\boldsymbol{x}\| F(\boldsymbol{x}/\|\boldsymbol{x}\|) = \boldsymbol{y}$, или $F(\bar{\boldsymbol{x}}) = \lambda \boldsymbol{y}$, где $\|\bar{\boldsymbol{x}}\| = 1$, $\lambda = 1/\|\boldsymbol{x}\|$. Чтобы указать соответствующий вектор $\bar{\boldsymbol{x}}$, норма которого равна $\alpha \neq 1$, достаточно вместо (4.1) рассмотреть оператор $\|\boldsymbol{x}\| F(\alpha \boldsymbol{x}/\|\boldsymbol{x}\|)$. ▲

Используя соображения непрерывности, теорему 4.2 можно усилить.

Теорема 4.3. *Пусть $F: R_+^n \to R^n$ является Р-отображением и набор переменных $\boldsymbol{x}$ неизбыточен. Тогда для любого $\boldsymbol{y} \in R_+^n$ ($\boldsymbol{y} \neq 0$) можно указать вектор $\boldsymbol{x} \in R_+^n$ (с любой наперед заданной нормой $\|\boldsymbol{x}\| = \alpha > 0$) такой, что $F(\boldsymbol{x}) = \lambda \boldsymbol{y}$ при некотором $\lambda > 0$.*

Справедливость приведенного утверждения в случае $y \in \operatorname{int} R_+^n$ вытекает из теоремы 4.2. Пусть теперь дана произвольная точка $y_0 \neq 0$, принадлежащая границе $R_+^n$. Возьмем последовательность $y_k \to y_0$ такую, что $y_k \in \operatorname{int} R_+^n$, и пусть последовательность $x_k \in R_+^n$ такова, что $\|x_k\| = \alpha$, $F(x_k) = \lambda_k y_k$ (существование $x_k$ следует из теоремы 4.2). В силу компактности множества тех $x \in R_+^n$, для которых $\|x\| = \alpha$, можно считать $x_k \to x_0$, $\lambda_k \to \lambda_0$, причем $\lambda_0 > 0$. Из непрерывности $F$ следует $F(x_0) = \lambda_0 y_0$. ▲

Теорема 4.4. *Пусть $F: R_+^n \to R^n$ является P-отображением, набор переменных $x$ неизбыточен и*

$$\lim_{\|x\| \to \infty} \|F(x)\| = \infty. \qquad (4.2)$$

*Тогда уравнение $F(x) = y$ при любом $y \in R_+^n$ имеет решение $x \in R_+^n$.*

Доказательство. Пусть $l$ — произвольный луч, проходящий через внутренние точки $R_+^n$. Множество $l \setminus \{0\}$ будем считать наделенным относительной топологией, порождаемой топологией пространства $R^n$ [т. е. обычной топологией интервала $(0, \infty)$]. Обозначим через $\Omega$ множество тех $y \in l \setminus \{0\}$, при которых уравнение $F(x) = y$ имеет решение. В силу теоремы 4.2 $\Omega$ непусто.

Покажем, что $\Omega$ открыто в $l \setminus \{0\}$. Пусть $y_0 \in l \setminus \{0\}$ и $F(x_0) = y_0$. Из доказательства теорем 4.1 и 4.2 легко видеть, что существует область, на границе которой вращение поля $F(x) - y_0$ отлично от нуля. Поэтому при достаточно малых $\Delta y$ вращение поля $F(x) - y_0 - \Delta y$ на границе той же области также отлично от нуля, и, следовательно, при малых $\Delta y$ уравнение $F(x) = y_0 + \Delta y$ имеет решение. Итак, $\Omega$ открыто в $l \setminus \{0\}$.

Покажем теперь, что $\Omega$ замкнуто в $l \setminus \{0\}$. Пусть $y_k \to y^*$ и $y_k \in \Omega$. Пусть $x_k$ таковы, что $F(x_k) = y_k$. В силу (4.2) последовательность $x_k$ ограничена, поэтому можно считать $x_k \to x^*$, причем, очевидно, $x^* \neq 0$. Из непрерывности $F$ следует $F(x^*) = y^*$.

Итак, $\Omega$ одновременно открыто и замкнуто в $l \setminus \{0\}$ и непусто, поэтому $\Omega = l \setminus \{0\}$. Это означает, что при любом $y \in \operatorname{int} R_+^n$ уравнение $F(x) = y$ имеет решение. Из этого факта и непрерывности $F$ следует существование решения уравнения $F(x) = y$ при любом $y \in R_+^n$. ▲

Приведем иллюстративный пример. В нелинейной модели межотраслевого баланса режим (план) $x \in R_+^n$ $(x \neq 0)$ назовем *абсолютно непродуктивным*, если

$$\forall\, i: x_i - p_i(x) \leqslant 0.$$

Пусть оператор $P(x)$ [все $p_i(x) \geqslant 0$, $p_i(0) = 0$] непрерывен. Легко видеть, что $F(x) = x - P(x)$ является $P$-отображением, если в системе невозможен абсолютно непродуктивный режим. Кроме того, набор переменных $x$ здесь заведомо неизбыточен. Перечисленные соображения в совокупности с теоремой 4.4 показывают справедливость следующего утверждения.

Теорема 4.5. *Пусть в системе невозможен абсолютно непродуктивный режим и*

$$\lim_{\|x\|\to\infty} \|x - P(x)\| = \infty.$$

*Тогда в системе реализуем любой (неотрицательный) набор чистых выпусков.* ▲

Нетрудно видеть, что приведенные результаты сохраняют силу, если оператор $F$ не $P$-отображение, но $P$-отображением является некоторый другой оператор, который получается из $F$ перенумераций компонент оператора $F$, но не компонент вектора $x$ (или, наоборот, компонент $x$, но не компонент $F$). Перенумерацию компонент $x$ (или $F$) иногда можно интерпретировать как перераспределение ответственности в системе: за результатом $y_i$ вместо $x_i$ закрепляется действие $x_{\pi(i)}$, где функция $\pi(i)$ осуществляет некоторую перестановку индексов.

## § 5. Универсальные $P$-отображения

Переменные $x_i$ по-прежнему будем называть действиями, а $y_i = f_i(x)$ — результатами, но теперь будем считать, что $x_i$ могут принимать не только положительные значения, но и отрицательные, причем для любого $x_j \neq 0$

$$\operatorname{sign} f_j(0, \ldots, 0, x_j, 0, \ldots, 0) = \operatorname{sign} x_j,$$

т. е. «при отсутствии помех» каждое положительное действие $x_j$ дает положительный результат $y_j$, отрицательное — отрицательный.

Пусть $F(0) = 0$ и надо некоторые $y_j$ увеличить, а другие уменьшить. Здесь естественно задаться следующим вопросом: можно ли такого изменения вектора $y$ добиться «стереотипными» действиями, т. е. увеличивая $x_j$, если $y_j$ надо увеличить, и уменьшая $x_j$, если $y_j$ надо уменьшить. Положительный ответ на этот вопрос можно дать, если оператор $F(x) = \{f_1(x), \ldots, f_n(x)\}$ — *универсальное P-отображение.*

*Непрерывный оператор* $F: R^n \to R^n$ $(F(0) = 0)$ *назовем универсальным P-отображением, если для любого* $x \neq 0$ *существует номер* $j$ *такой, что* $x_j f_j(x) > 0$ (т. е. хотя бы один результат «*ожидаемый*»).

Теорема 5.1. *Пусть $F$ — универсальное P-отображение и $R^n_{+-}$ обозначает некоторый (произвольный) ортант. Тогда существует вектор $x \in R^n_{+-}$ такой, что $F(x) \in \operatorname{int} R^n_{+-}$ [т. е. все результаты «ожидаемые» (все действия «стереотипны»)].*

Для доказательства надо перейти к другой системе координат, изменив перед некоторыми $x_j$ знаки так, чтобы в новой системе координат множество $R^n_{+-}$ стало неотрицательным ортантом. Очевидно, сужение $F$ на $R^n_{+-}$ в новой системе координат является $P$-отображением, и остается применить теорему 4.1. ▲

Непрерывный оператор $F: R^n \to R^n$ назовем *универсальным $P$-отображением по приращению*, если для любого $\boldsymbol{x} \in R^n$ и любого $\Delta \boldsymbol{x} \neq 0$ ($\Delta \boldsymbol{x} \in R^n$) существует номер $j$ такой, что

$$[f_j(\boldsymbol{x}+\Delta \boldsymbol{x}) - f_j(\boldsymbol{x})]\,\Delta x_j > 0. \tag{5.1}$$

Если же (5.1) выполняется лишь для $\Delta \boldsymbol{x}$ достаточно малых по норме, то оператор $F$ будем называть *локальным универсальным $P$-отображением по приращению.*

Проверка наличия у системы (оператора) «$P$-свойства» в локальном масштабе представляется более доступной, и, как показывает следующая теорема, ею можно ограничиться.

Теорема 5.2. *Любое локальное универсальное $P$-отображение по приращению — универсальное $P$-отображение по приращению.*

Доказательство. Заметим сначала, что теорема 4.1 сохраняет силу, если в определении $P$-отображения требовать справедливости условия $\exists\, j: x_j f_j(\boldsymbol{x}) > 0$ лишь для $\boldsymbol{x} \in R^n_+$ ($\boldsymbol{x} \neq 0$), достаточно малых по норме. В этом случае можно будет утверждать существование лишь достаточно малого по норме вектора $\boldsymbol{x} \in R^n_+$ такого, что $f_i(\boldsymbol{x}) > 0$ для всех $i = 1, \ldots, n$. Это становится очевидным, если в доказательстве теоремы 4.1 вместо (4.1) взять оператор $\|\boldsymbol{x}\| F\left(\alpha \dfrac{\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|}\right)$, где $\alpha$ достаточно мало.

Итак, предположим, что утверждение теоремы 5.2 неверно. Тогда найдется пара точек $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{b}$ таких, что

$$\forall\, i: [f_i(\boldsymbol{a}) - f_i(\boldsymbol{b})]\,(a_i - b_i) \leqslant 0.$$

Без ограничения общности можно считать, что $\boldsymbol{a} \geqslant \boldsymbol{b}$ и даже $\forall\, i: a_i > b_i$ [иначе в последующих рассуждениях можно было бы перейти к «усеченному» оператору $P_m F(P_m \boldsymbol{x})$, где $P_m$ — матрица, у которой $m$ (произвольных) диагональных элементов равны 1, а все остальные элементы нулевые; очевидно, любой оператор $P_m F(P_m \boldsymbol{x})$ — также $P$-отображение]. Обозначим через $T$ множество тех $\boldsymbol{x} \in \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle$, для которых $F(\boldsymbol{x}) \leqslant F(\boldsymbol{a})$. Поскольку $F$ непрерывен, $T$ компактно, а $F$ — локальное универсальное $P$-отображение, точка $\boldsymbol{a}$ — изолированная точка множества $T$. Следовательно, компактно также $T \setminus \{\boldsymbol{a}\}$. На компактном множестве функция $\varphi(\boldsymbol{x}) = \sum\limits_i |x_i|$ достигает минимума в некоторой точке $\boldsymbol{x}^* \in T \setminus \{\boldsymbol{a}\}$. С другой стороны, по упомянутой выше модификации теоремы 4.1 существует достаточно малый по норме вектор $\Delta \boldsymbol{x} \leqslant 0$ такой, что $\forall\, i: f_i(\boldsymbol{x}^* + \Delta \boldsymbol{x}) < f_i(\boldsymbol{x}^*)$. Следовательно, $\boldsymbol{x}^* + \Delta \boldsymbol{x} \in T \setminus \{\boldsymbol{a}\}$, но тогда $\varphi(\boldsymbol{x}^* + \Delta \boldsymbol{x}) < \varphi(\boldsymbol{x}^*)$. ▲

Рассмотрение универсальных $P$-отображений представляет интерес не только с точки зрения задач сравнительной статики, но и при изучении глобальной обратимости отображений (см. главу V).

## § 6. Принцип Ле-Шателье — Самуэльсона в экстремальных задачах

Иногда равновесие системы определяется на основе оптимизационных соображений. Быть может, здесь лучше даже говорить не о равновесии, а о выделенном состоянии, которое система выбирает самостоятельно, решая определенную экстремальную задачу в заданных внешних условиях. Нас будет интересовать характер влияния этих условий на положение оптимума.

Пусть элемент $y \in Y$ характеризует внешнее воздействие на систему, а состояние системы описывается элементом $x \in X_y$, т. е. множество допустимых состояний зависит от $y \in Y$. Задача системы состоит в минимизации некоторого функционала $\varphi(x, y)$, т. е. при любом фиксированном $y \in Y$ решается задача на условный экстремум

$$\varphi(x, y) \to \min, \quad x \in X_y. \tag{6.1}$$

Мы будем предполагать, что при любом $y \in Y$ множество $X_y$ непусто и задача (6.1) имеет решение *. Множество решений задачи (6.1) будем обозначать через $\Omega(y)$, т. е. $\Omega(y)$—множество тех точек $x \in X_y$, в которых $\varphi(x, y)$ достигает на $X_y$ минимального значения.

Теорема 6.1. *Пусть* $y_1, y_2 \in Y$, $x_1 \in \Omega(y_1)$, $x_2 \in \Omega(y_2)$ *и* $x_1 \in X_{y_2}$, $x_2 \in X_{y_1}$; тогда

$$\varphi(x_1, y_1) - \varphi(x_1, y_2) \leqslant \varphi(x_2, y_1) - \varphi(x_2, y_2), \tag{6.2}$$

*причем, если*

$$x_1 \notin \Omega(y_2) \text{ или } x_2 \notin \Omega(y_1), \tag{6.3}$$

*то в* (6.2) *имеет место строгое неравенство.*

Доказательство вытекает из сравнения очевидных неравенств

$$\varphi(x_1, y_1) \leqslant \varphi(x_2, y_1), \qquad \varphi(x_2, y_2) \leqslant \varphi(x_1, y_2). \tag{6.4}$$

Если выполняется (6.3), то одно из неравенств (6.4) будет строгим. ▲

В частном случае $Y \subset R^n$, $\forall\, y \in Y: X_y = X \subset R^n$,

$$\varphi(x, y) = \psi(x) + (y, x), \tag{6.5}$$

мы имеем

$$(x_1 - x_2, y_1 - y_2) \leqslant 0. \tag{6.6}$$

---

* Задача (6.1) заведомо имеет решение, если $X_y$ — компакт, а функционал $\varphi(x, y)$ непрерывен по $x$.

Именно этот частный результат носит название принципа Ле-Шателье — Самуэльсона.

Рассмотрим одну из возможных экономических интерпретаций. Пусть фирма закупает набор ресурсов $\boldsymbol{x} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ по ценам $\boldsymbol{y} = \{y_1, \ldots, y_n\}$ и от переработки $\boldsymbol{x}$ получает доход $f(\boldsymbol{x})$. Задача максимизации прибыли $f(\boldsymbol{x}) - (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$ эквивалентна задаче минимизации функции (6.5), где $\psi(\boldsymbol{x}) = -f(\boldsymbol{x})$. Из неравенства (6.6) в этом случае вытекает, что при увеличении цены на некоторый вид ресурса объем закупки этого ресурса убывает (не возрастает). Такая интерпретация показывает, что принцип Ле-Шателье — Самуэльсона для экстремальной задачи ближе по духу к первому закону Хикса (§ 2), чем к утверждению теоремы 2.3.

Глава пятая

# ГЛОБАЛЬНАЯ ОБРАТИМОСТЬ ОТОБРАЖЕНИЙ И РАЗРЕШИМОСТЬ НЕЯВНЫХ ФУНКЦИЙ

Это последняя глава, посвященная задачам статики. Здесь изучаются вопросы глобальной обратимости отображений и глобальной разрешимости неявных функций. При изучении нелинейных систем в целом эти вопросы играют весьма важную роль, и задача об однозначной зависимости положения равновесия от внешних воздействий (глава I, § 3) не исчерпывает их прикладного значения.

Напомним стандартную для этой тематики терминологию. Пусть $X$, $Y$ — метрические пространства и оператор $F$ отображает $X$ в $Y$ ($F: X\to Y$). Отображение $F: X\to Y$ называется *сюръективным* (*сюръекцией*), если для любого $y\in Y$ найдется элемент $\boldsymbol{x}\in X$ такой, что $F(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{y}$. Другими словами, $F: X\to Y$ сюръективно, если $F(X)=Y$. Отображение $F: X\to Y$ называется *инъективным* (*инъекцией*), если из $F(\boldsymbol{x}_1)=F(\boldsymbol{x}_2)$ следует $\boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{x}_2$, т. е. инъекция — это взаимооднозначное отображение (обратный оператор $F^{-1}$, однако, может не быть определен на всем $Y$).

Если $F: X\to Y$ инъективно, сюръективно и непрерывно в обе стороны (т. е. оба оператора $F$ и $F^{-1}$ непрерывны), то говорят, что $F$ — *гомеоморфизм* $X$ на $Y$. В том случае, когда существует гомеоморфизм $X$ на $Y$, говорят, что $X$ и $Y$ *гомеоморфны*.

Наконец, $F: X\to Y$ назовем *локальным гомеоморфизмом*, если для любой пары $\boldsymbol{x}\in X$, $\boldsymbol{y}\in Y$ такой, что $F(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{y}$, найдутся открытые окрестности $V_{\boldsymbol{x}}\subset X$, $W_{\boldsymbol{y}}\subset Y$ точек $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ такие, что сужение $F$ на $V_{\boldsymbol{x}}$ есть гомеоморфизм $V_{\boldsymbol{x}}$ на $W_{\boldsymbol{y}}$. Для случая $F: R^n\to R^n$ широко известны достаточные условия локальной гомеоморфности, состоящие в невырожденности матрицы Якоби $F'(\boldsymbol{x})=[\partial f_i/\partial x_j]$.

Напомним также определения топологических понятий связности, которые будут здесь использоваться. Пространство $X$ называется *связным*, если его невозможно представить в виде объединения двух открытых (непустых) множеств и *линейно связным*, если для любых двух точек $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\in X$ существует непрерывное отображение $P: [0, 1]\to X$ такое, что $P(0)=\boldsymbol{a}$, $P(1)=\boldsymbol{b}$ (т. е. любые две точки могут быть соединены непрерывной кривой, целиком лежащей в $X$). Линейная связность $X$ влечет за собой связность $X$ (обратное неверно). Стягиваемое пространство линейно связно.

## § 1. Глобальные гомеоморфизмы в $R^n$

Установим предварительно справедливость следующего вспомогательного утверждения.

Лемма 1.1. *Пусть $F: R^n \to R^n$ — локальный гомеоморфизм и $y_1 = F(x_1)$, $y_2 = F(x_2)$; тогда индексы точек $x_1$ и $x_2$ соответственно у векторных полей $F(x) - y_1$ и $F(x) - y_2$ равны.*

Доказательство. Поскольку $F$ — локальный гомеоморфизм, $x_1$ — изолированный нуль поля $F(x) - y_1$. Обозначим индекс точки $x_1$ поля $F(x) - F(x_1)$ через $\gamma(x_1)$. Напомним, что $\gamma(x_1)$ вращение векторного поля $F(x) - F(x_1)$ на границе шара (содержащего $x_1$) достаточно малого радиуса. В силу локальной гомеоморфности $F$ существует такой открытый шар $B_r$, что $x_1 \in B_r$ и

$$\forall x, z \in \overline{B}_r, \ x \neq z: F(x) - F(z) \neq 0.$$

Вращения полей $F(x) - F(x_1)$ и $F(x) - F(z)$, где $z \in B_r$, на границе $B_r$ равны, так как существует гомотопический мост

$$H(x, \tau) = F(x) - F(\tau x_1 - (1 + \tau) z).$$

Следовательно, функция $\gamma(x_1)$ как функция $x_1$ локально постоянна. Соединим теперь точки $x_1$ и $x_2$ непрерывной кривой $x(\tau)$ ($x(0) = x_1$, $x(1) = x_2$, $\tau \in [0, 1]$). Поскольку функция $\chi(\tau) = \gamma(x(\tau))$ локально постоянна, $\gamma(x(0)) = \gamma(x(1))$. ▲

Теорема 1.1. *Для того чтобы $F: R^n \to R^n$ было гомеоморфизмом $R^n$ на $R^n$, необходимо и достаточно выполнение двух условий*:

*$a^0$. $F$ — локальный гомеоморфизм.*

*$b^0$. Прообраз любого ограниченного множества ограничен.*

Необходимость этих условий очевидна. Достаточность. Вращения полей $F(x) - F(0)$ и $F(x) - y$ (при любом $y \in R^n$) на сферах $S_R$ достаточно большого радиуса равны, так как существует гомотопический мост

$$H(x, \tau) = F(x) - \tau F(0) - (1 - \tau) y.$$

Функция $H(x, \tau)$ не обращается в ноль ни при каких $x \in S_R$, $\tau \in [0, 1]$ в силу условия $b^0$ ($R$ достаточно велико). Учитывая теперь результат леммы 1.1 и утверждение теоремы об алгебраическом числе нулей векторного поля (глава II, § 6), приходим к выводу, что число решений $F(x) - y = 0$ как функция $y$ константа, отличная от нуля. Это влечет за собой сюръективность $F$. Пусть $y = 0$ соответствуют решения $x_1, \ldots, x_m$, где $m \geqslant 2$. (Заметим, что число решений конечно, так как все они изолированы в силу $a^0$ и лежат в ограниченной области в силу $b^0$.) При движении по любому лучу $vt$ (при фиксированном $v \in R^n$, $\|v\| = 1$) от $t = 0$ до $t = \infty$ из каждой точки $x_i$ ($i = 1, \ldots, m$) выходит однозначная непрерывная (в силу $a^0$) кривая $x_i(t)$ такая, что $F(x_i(t)) = vt$. В силу постоянства числа решений уравнения $F(x) - y = 0$ кривые, выходящие из различных точек $x_i$, $x_j$, не могут пересекаться. Отнесем теперь к множеству $C_i$ все точки кривых (соответствующих всевозможным $v \in R^n$, $\|v\|=1$), выходящих из точки $x_i$. Легко видеть, что множества $C_i$ открыты (в силу $a^0$). В то же время $\bigcup_i C_i = R^n$. Но это противоречит связности $R^n$. Это доказывает инъективность $F$. Непрерывность $F^{-1}$ следует из $a^0$. ▲

Заметим, что условию $b^0$ можно придать другую эквивалентную форму, которая иногда оказывается более удобной.

Лемма 1.2. *Пусть $F: R^n \to R^n$ непрерывно. Тогда для справедливости $b^0$ необходимо и достаточно*

$$\lim_{\|x\|\to\infty} \|F(x)\| = \infty. \qquad (1.1)$$

Необходимость. Пусть $b^0$ справедливо, а (1.1) не выполняется. Тогда найдется последовательность $x_k$ такая, что $\|x_k\| \to \infty$, но $F(x_k) = y_k \to y^*$. В этом случае прообраз ограниченного множества $\{y_k\} \cup \{y^*\}$ неограничен.

Достаточность. Пусть справедливо (1.1) и существует ограниченное множество $\Omega$, прообраз которого $F^{-1}(\Omega)$ неограничен. Тогда найдется последовательность $x_k \in F^{-1}(\Omega)$ такая, что $\|x_k\| \to \infty$. В силу (1.1) $\|F(x_k)\| \to \infty$. С другой стороны, $\forall k: F(x_k) \in \Omega$. ▲

Обратим внимание, что теорему 1.1 можно трактовать как принцип существования и единственности решения уравнения $F(x) = y$ при любом $y \in R^n$ (кроме того, здесь дополнительно утверждается, что решение непрерывно зависит от $y$).

Приведем пример. Пусть имеется $n$ обслуживающих устройств $A_i$. Качество обслуживания $A_i$ характеризуется величиной $x_i > 0$, поток клиентов через $A_i$ — величиной $y_i > 0$. Будем считать зависимость $y_i = f_i(x_1, \ldots, x_n)$ непрерывной и предположим, что оператор $F$ локально обратим (является локальным гомеоморфизмом). Содержательно это означает, что при малых изменениях вектора $x$ (качества обслуживания) меняется хотя бы один поток клиентов $y_i$, и малым изменениям потоков клиентов можно сопоставить малые изменения качества обслуживания. Другое предположение состоит в следующем. Если последовательность $x^k$ такова, что хотя бы для одного $i$ или $x_i^k \to 0$, или $x_i^k \to \infty$, то последовательность $y^k = F(x^k)$ такова, что хотя бы для одного $j$ или $y_j^k \to 0$, или $y_j^k \to \infty$. Другими словами, если качество обслуживания некоторого $A_i$ стремится к нулю или к бесконечности, то найдется устройство $A_j$, поток клиентов через которое также стремится к нулю или к бесконечности (соответствие необязательно).

Теорема 1.2. *В указанных предположениях уравнение $F(x) = y$ ($x, y \in \operatorname{int} R_+^n$) при любом $y$ имеет единственное решение, непрерывно зависящее от $y$, т. е. однозначным набором величин $x_i$ можно реализовать любой заданный набор потоков клиентов.*

Для доказательства достаточно перейти от переменных $x_i$, $y_i$ к переменным $x_i' = \ln x_i$, $y_i' = \ln y_i$ и затем воспользоваться теоремой 1.1 и леммой 1.2. ▲

Запишем полученный результат более формально.

Теорема 1.3. *Для того чтобы* $F: \operatorname{int} R^n_+ \to \operatorname{int} R^n_+$ *было гомеоморфизмом* $\operatorname{int} R^n_+$ *на* $\operatorname{int} R^n_+$, *достаточно выполнение двух условий* ($a^0$ *и* $c^0$): *если существует* $i$ *такое, что* $\max\left(x_i^k, \dfrac{1}{x_i^k}\right) \to \infty$ *при* $k \to \infty$, *то существует* $j$, *для которого* $\max\left(y_j^k, \dfrac{1}{y_j^k}\right) \to \infty$. ▲

Теорему 1.3 удобно использовать для доказательства существования и единственности решения в широко распространенной задаче максимизации прибыли при закупке и переработке ресурсов. Пусть фирма закупает набор ресурсов $\boldsymbol{x} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ по ценам $\boldsymbol{y} = \{y_1, \ldots, y_n\}$ и при этом решает задачу

$$\varphi(\boldsymbol{x}) - (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) \to \max_{\boldsymbol{x}}. \tag{1.2}$$

Теорема 1.4. *Пусть положительная функция* $\varphi(\boldsymbol{x})$, *определенная на* $\operatorname{int} R^n_+$, *непрерывно дифференцируема и строго вогнута, и пусть равномерно по* $\boldsymbol{x}$

$$\lim_{x_j \to 0} \frac{\partial \varphi(\boldsymbol{x})}{\partial x_j} = \infty, \qquad \lim_{x_j \to \infty} \frac{\partial \varphi(\boldsymbol{x})}{\partial x_j} = 0.$$

*Тогда при любых положительных* $y_1, \ldots, y_n$ *положительное решение задачи* (1.2) *существует и единственно.*

Для доказательства надо применить теорему 1.3 к оператору $F(\boldsymbol{x}) = \operatorname{grad} \varphi(\boldsymbol{x})$, который является локальным гомеоморфизмом, так как гессиан $\varphi(\boldsymbol{x})$ отличен от нуля [положителен в силу строгой вогнутости $\varphi(\boldsymbol{x})$]. ▲

В заключение отметим результат, который, по существу, был нами уже установлен (при доказательстве теоремы 1.1).

Теорема 1.5. *Пусть вращение векторного поля* $F(\boldsymbol{x}) - F(0)$ *на сферах достаточно большого радиуса отлично от нуля и справедливо* (1.1). *Тогда уравнение* $F(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}$ *имеет решение при любом* $\boldsymbol{y} \in R^n$, т. е. оператор $F$ *сюръективен.* ▲

## § 2. Общая теорема о глобальном гомеоморфизме

В прикладных задачах изучаемый оператор $F$ бывает определен лишь на некотором подмножестве $R^n$. Теорема 1.1 (равно как и ее очевидные следствия) в этом случае не всегда оказывается работоспособной. Приведем более общую теорему.

Теорема 2.1. *Пусть $F$ отображает метрическое пространство $X$ в метрическое пространство $Y$, причем $X$ линейно связно, а $Y$ стягиваемо по себе. Тогда, чтобы $F$ было гомеоморфизмом*

*X на Y, необходимо и достаточно выполнение двух условий:*

*1°. F — локальный гомеоморфизм.*

*2°. Прообраз любого компактного подмножества Y компактен * в X.* ▲

Теорема 2.1 — частный случай теоремы 4.1, которая доказывается в § 4. Здесь мы докажем справедливость более общего утверждения.

Теорема 2.2. *Теорема 2.1 остается в силе, если условиг стягиваемости Y заменить более слабым: Y линейно связано, и любая непрерывная замкнутая кривая, лежащая в Y, может быть непрерывно стянута в точку **.*

Доказательство. Необходимость условий 1° и 2° очевидна. Достаточность. Установим сюръективность $F$. В силу 1° множество $F(X)$ открыто в $Y$. Покажем, что оно также замкнуто. Пусть $y_k \to y$ и $\forall k: y_k \in F(X)$. В силу 2° прообраз компактного множества $\{y_k\} \cup \{y\}$ компактен в $X$. Поэтому у последовательности $x_k (x_k \in F^{-1}(y_k))$ существует сходящаяся подпоследовательность $x_{k_m} \to x$. Учитывая непрерывность $F$, получаем $y_{k_m} = F(x_{k_m}) \to \to F(x)$. Отсюда $F(x) = y$, т. е. $y \in F(X)$. Итак, $F(X)$ одновременно открыто и замкнуто в $Y$, а поскольку $Y$ связно, то $F(X) = Y$. Сюръективность доказана.

Инъективность. В предположении противного найдутся точки $x_1 \neq x_2$ такие, что $F(x_1) = F(x_2) = y_0$. Соединим $x_1$ и $x_2$ непрерывной кривой $P(t)$, $t \in [0, 1]$, $P(0) = x_1$, $P(1) = x_2$ и рассмотрим ее образ $Q(t) = F(P(t))$, представляющий собой замкнутую кривую. Пусть $H(t, \lambda) (\lambda \in [0, 1])$ — непрерывная деформация $Q(t)$ в точку $y_0$, $H(t, 0) = Q(t)$, $H(t, 1) = y_0$. Поскольку $F$ сюръективно, для любых $t, \lambda \in [0, 1] \times [0, 1]$ прообраз $H(t, \lambda)$ не пуст. Кроме того, в силу 1°, 2° из каждой точки $P(t) \in X$ (при любом фиксированном $t \in [0, 1]$ выходит однозначная непрерывная по $\lambda$ ветвь

$$P(t, \lambda) \in F^{-1}(H(t, \lambda)),$$

определенная для любого $\lambda \in [0, 1]$. Если теперь показать, что при любом фиксированном $\lambda$, в том числе при $\lambda = 1$, $P(t, \lambda)$ представляет собой непрерывную кривую, то получится требуемое противоречие. Действительно, в этом случае прообраз точки $y_0 \in Y$ будет содержать непрерывную кривую $P(t, 1)$ что противоречит 1°.

Покажем непрерывность $P(t, \lambda)$ в любой наперед заданной точке $t_0 \in [0, 1]$ при любом фиксированном $\lambda \in [0, 1]$. В силу 1° и 2° прообраз каждой точки $y \in Y$ состоит не более чем из конечного числа точек. Поэтому для каждой точки $y \in Y$ существует такой

---

* Отображение, прообразы компактов которого компактны, называется собственным.

** Этому условию, например, удовлетворяет сфера в $R^n (n \geqslant 3)$, которая по себе нестягиваема.

открытый шар $W_y \subset Y$, что для каждого $x \in F^{-1}(y)$ существует окрестность $V_x \subset X$ такая, что сужение $F$ на $V_x$ — гомеоморфизм $V_x$ на $W_y$. Выберем $\Delta\lambda_1$ из условия $\forall \gamma \in [0, \Delta\lambda_1] : H(t_0, \gamma) \in W_y$, где $y = H(t_0, 0)$. Тогда для $t$, достаточно близких к $t_0$, очевидно,

$$P(t, \Delta\lambda_1) = F_{V_x}^{-1}(H(t, \Delta\lambda_1)),$$

где $F_{V_x}$ — сужение $F$ на $V_x (x = P(t_0, 0))$. Аналогичным образом можно представить второй шаг $P(t, \Delta\lambda_1 + \Delta\lambda_2)$ и т. д. Поскольку множество $H([0, 1], [0, 1])$ компактно (как непрерывный образ компакта $[0, 1] \times [0, 1]$), из его покрытия шарами можно выбрать конечное подпокрытие. Поэтому $P(t, \lambda)$ при любом наперед заданном $\lambda \in [0, 1]$ и $t$, достаточно близких к $t_0$, можно определить с помощью конечного числа указанных выше шагов, т. е. сужение $P(t, \lambda)$ на достаточно малую окрестность $t_0$ — композиция конечного числа непрерывных операторов. Это доказывает непрерывность $P(t, \lambda)$ по $t$ и завершает доказательство инъективности. Непрерывность $F^{-1}$ вытекает из 1°. ▲

## § 3. Некоторые частные результаты

Хотя теорема 2.2 в известном смысле дает исчерпывающий ответ на вопрос о глобальном гомеоморфизме, с точки зрения приложений полезно располагать набором достаточных условий, из которого в зависимости от ситуации можно выбирать наиболее подходящие (удобные).

Поскольку для установления локальной гомеоморфности отображения $F$ наиболее часто используется условие невырожденности матрицы Якоби $F'(x) = [\partial f_i / \partial x_j]$, представляется естественной попытка ввести дополнительные ограничения на матрицу $[\partial f_i / \partial x_j]$, которые гарантировали бы глобальную обратимость. Под глобальной обратимостью $F : X \to Y$ мы будем понимать инъективность $F$ плюс непрерывность обратного оператора, т. е. глобальная обратимость $F : X \to Y$ равнозначна тому, что $F$ есть гомеоморфизм $X$ на $F(X)$.

Теорема 3.1. *Пусть множество $X \subset R^n$ выпукло и матрица Якоби отображения $F : X \to R^n$ всюду в $X$ положительно определена; тогда $F$ глобально обратимо.*

Доказательство весьма просто. Пусть $a, b \in X$ и $a \neq b$. Положим $x(\tau) = a + \tau(b - a) (\tau \in [0, 1])$. В силу выпуклости $X$ имеем $x(\tau) \in X$. Производная функции

$$\varphi(\tau) = (F(x(\tau)) - F(a), b - a)$$

равна

$$\varphi'(\tau) = \sum_{i,j}^{n} \frac{\partial f_i(x(\tau))}{\partial x_j} (b_i - a_i)(b_j - a_j),$$

а так как матрица $\left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right]$ положительно определена, то $\varphi'(\tau) > 0$. Поэтому $\varphi(1) > \varphi(0) = 0$, т. е. $F(a) \neq F(b)$. ▲

Из результатов предыдущего параграфа нетрудно усмотреть справедливость следующего утверждения.

Теорема 3.2. *Пусть множество $X \subset R^n$ ограничено и выпукло, а $F(X)$ гомеоморфно $X$ (например, тоже ограничено и выпукло). Пусть матрица Якоби отображения $F: X \to R^n$ всюду в $X$ невырожденна; тогда $F$ глобально обратимо.* ▲

В случае $F: R^n \to R^n$ на матрицу $[\partial f_i/\partial x_j]$ можно накладывать более слабое требование, чем в теореме 3.1. Здесь достаточно потребовать, чтобы $[\partial f_i/\partial x_j]$ всюду в $R^n$ была $P$-матрицей ($P$-матрицей называется матрица, у которой все главные миноры положительны). Этот факт становится очевидным, если принять во внимание справедливость следующего результата.

Теорема 3.3. *Для того чтобы линейное отображение $A: R^n \to R^n$ было универсальным $P$-отображением по приращению* (см. главу IV, § 5), *необходимо и достаточно, чтобы матрица* * *$A$ была $P$-матрицей* **. ▲

Из теоремы 3.3 вытекает, что оператор $F: R^n \to R^n$, матрица которого всюду в $R^n$ является $P$-матрицей,— локальное универсальное $P$-отображение по приращению, а значит (теорема 5.2 в главе IV), и универсальное $P$-отображение по приращению (в целом). Инъективность же любого универсального $P$-отображения по приращению очевидна (см. главу IV, § 5).

Инъективным оператор $F: R^n \to R^n$ будет и в том случае, когда универсальным $P$-отображением по приращению является оператор $\tilde{F}: R^n \to R^n$, получающийся из $F$ некоторой перенумерацией компонент $f_i(x)$ и произвольной переменой знаков перед $f_i(x)$. Следовательно, $F: R^n \to R^n$ инъективен, если матрица Якоби $[\partial f_i/\partial x_j]$ при некоторой фиксированной перестановке строк (с возможным изменением знаков строк) переходит в $P$-матрицу.

Если исходить из указанного выше определения $P$-матрицы, то свойство положительности главных миноров матрицы Якоби с точки зрения практического анализа нелинейных систем по крайней мере не представляется удобным и по первому впечатлению выглядит бесполезным (не ясно, как его проверять, особенно если учесть, что точное описание системы зачастую отсутствует). Однако характеристическое свойство $P$-матриц ($P$-матрица не обращает знак ни одного ненулевого вектора), устанавливаемое теоремой 3.3, поддается естественным качественным интерпретациям (типа тех, которые обсуждались в главе IV) и сравнительно удобно для качественного анализа систем.

Иногда изучаемое отображение $F: R^n \to R^n$ удовлетворяет условию

$$\forall x, y \in R^n, x \neq y: (F(x) - F(y), x - y) > 0. \tag{3.1}$$

При этом $F$ — заведомо универсальное $P$-отображение по при-

* Мы не делаем различия между понятиями линейного отображения и матрицы (что допустимо в силу наличия изоморфизма).

** С точностью до терминологии это утверждение доказано в [56].

ращению (и значит, инъективно). Неравенство (3.1) имеет место, например, в том случае, когда $F$ представляет собой градиент строго выпуклого функционала [13].

Мы рассмотрели несколько различных типов условий, обеспечивающих инъективность оператора. Полезное дополнение к этим условиям дает следующее утверждение.

Теорема 3.4. *Пусть непрерывный оператор $F: R^n \to R^n$ инъективен и существует $\alpha > 0$ такое, что*

$$\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in R^n: \|F(\boldsymbol{x}) - F(\boldsymbol{y})\| \geqslant \alpha \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|; \tag{3.2}$$

*тогда $F$ — гомеоморфизм $R^n$ на $R^n$.*

Из (3.2) следует справедливость (1.1), а также непрерывность $F^{-1}$, так как

$$\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in R^n: \|F^{-1}(\boldsymbol{u}) - F^{-1}(\boldsymbol{v})\| \leqslant \frac{1}{\alpha} \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}\|. \blacktriangle$$

## § 4. Глобальная разрешимость неявных функций

Пусть дано уравнение (относительно $\boldsymbol{x}$)

$$\Phi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{z}_0, \tag{4.1}$$

где $\Phi: X \times Y \to X$ — непрерывное отображение и $\boldsymbol{z}_0$ — некоторый фиксированный элемент из $X$. Здесь $X$ и $Y$ — метрические пространства (не обязательно конечномерные), причем $X$ линейно связно, а $Y$ стягиваемо по себе.

Уравнение (4.1) назовем *локально разрешимым*, если:

1) *существует хотя бы одна пара $\boldsymbol{x} \in X$, $\boldsymbol{y} \in Y$, удовлетворяющая* (4.1);

2) *для любой пары $\boldsymbol{x} \in X$, $\boldsymbol{y} \in Y$, удовлетворяющей* (3.1), *можно указать окрестности $V_x \subset X$, $W_y \subset Y$ и непрерывное отображение $G: W_y \to V_x$ такие, что*

$$\forall \boldsymbol{y} \in W_y: \Phi(G(\boldsymbol{y}), \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{z}_0$$

*и $\Phi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \neq \boldsymbol{z}_0$, если $\boldsymbol{x} \neq G(\boldsymbol{y})$.* [*Другими словами,* (4.1) *на множестве $V_x \times W_y$ эквивалентно уравнению $\boldsymbol{x} = G(\boldsymbol{y})$*].

Уравнение (4.1) назовем *глобально разрешимым*, если существует непрерывное отображение $G: Y \to X$ такое, что (4.1) на $X \times Y$ эквивалентно уравнению $\boldsymbol{x} = G(\boldsymbol{y})$.

В этом случае говорят также, что (4.1) неявно задает функцию $G(\boldsymbol{y})$. Очевидно, задача разрешимости (4.1) в указанном смысле — более общая, чем задача глобальной обратимости отображения, так как последняя может быть сформулирована в виде вопроса о разрешимости уравнения $F(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{y} = 0$ относительно $\boldsymbol{x}$.

Теорема 4.1. *Чтобы уравнение* (4.1) *было глобально разрешимо, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:*

1°. *Уравнение* (4.1) *локально разрешимо.*

2°. *Если множество* $S\subset Y$ *компактно, то множество*

$$T=\{x\mid \Phi(x, y)=z_0,\ y\in S\}$$

*компактно в* $X$.

Доказательство. Необходимость условий 1° и 2° очевидна.

Достаточность. Покажем, что при любом $y\in Y$ уравнение (4.1) имеет решение. В силу 1° множество $\Omega\subset Y$ тех точек $y\in Y$, для которых (4.1) имеет решение, открыто. Покажем, что оно также замкнуто. Пусть $y_k\to y^*$ и $\forall k: y_k\in\Omega$. Для каждого $y_k$ возьмем по одному решению (4.1) $x_k$. Последовательность $x_k$ в силу 2° компактна, и без ограничения общности можно считать $x_k\to x^*$ (иначе можно перейти к подпоследовательности). Но тогда $\Phi(x^*, y^*)=z_0$, поскольку $\Phi(x_k, y_k)=z_0$ и отображение $\Phi$ непрерывно. Следовательно, $y^*\in\Omega$. Итак, $\Omega$ одновременно открыто и замкнуто в $Y$, а поскольку $Y$ связно (так как стягиваемо), то $\Omega=Y$, т. е. при любом $y\in Y$ уравнение (4.1) имеет хотя бы одно решение.

Покажем теперь, что (4.1) при любом $y\in Y$ имеет единственное решение $x=G(y)\in X$. В силу 1° и 2° число решений (4.1) при любом $y\in Y$ конечно. Кроме того, число решений (4.1) как функция $y$ — константа. Действительно, пусть при $y_1\in Y$ и $y_2\in Y$ (4.1) имеет различное число решений. Пусть $x_1, \ldots, x_m$ — решения (4.1), отвечающие $y_1$. Соединим точки $y_1$ и $y_2$ непрерывной кривой $P(\lambda)$

$$P:[0, 1]\to Y,\ P(0)=y_1,\ P(1)=y_2.$$

Из 1° и 2° следует, что из каждой точки $x_i\ (i=1, \ldots, m)$ выходит непрерывная кривая $x_i(\lambda)$ такая, что

$$\Phi(x_i(\lambda), P(\lambda))=z_0.$$

Так как число решений (4.1) при $y_1$ и $y_2$ различно, кривые $x_i(\lambda)$ должны или ветвиться, или пересекаться. Но это противоречит условию 1°.

Фиксируем теперь некоторую точку $y_0\in Y$, и пусть ей отвечают решения (4.1) $x_1^0, \ldots, x_m^0$. Предположим, что $m\geqslant 2$. Поскольку $Y$ стягиваемо, существует гомотопия $H_\lambda(y)$, связывающая тождественное отображение $H_0: Y\to Y$ с отображением $H_1: Y\to y_0$. Пусть $x_1, \ldots, x_m$ — множество решений (4.1), отвечающих $y\in Y$. Соединим $y$ и $y_0$ кривой $P(\lambda)=H_\lambda(y)$ и рассмотрим соответствующие кривые $x_i(\lambda)$ (см. выше). Каждая кривая $x_i(\lambda)$ имеет два конца $x_i=x_i(0)$ и $x_j^0=x_i(1)$. Точки $x_i$ и $x_j^0$ в этом случае назовем эквивалентными. Пусть $C_i\subset X$ — множество точек, эквивалентных $x_i^0\ (i=1, \ldots, m)$. Очевидно, $\bigcup_i C_i=X$ и все множества $C_i$ открыты. Но это противоречит связности $X$. Следовательно, $m=1$.

Непрерывность $G: Y\to X$ вытекает из 1°. ▲

Глава шестая

# АНСАМБЛИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ (АДС)

Мы приступаем к рассмотрению вопросов динамики систем. В главе I уже отмечалось, что содержательная постановка изучаемой задачи выходит за рамки классической теории динамических систем и дает повод для исследования ансамблей динамических систем (АДС) *. Здесь будут даны формальные определения и изучены различные динамические свойства ансамблей, относящиеся к проблеме устойчивости. Наиболее трудоемкая часть изложения приходится на доказательство теорем, обобщающих результаты Н. Н. Красовского по обращению теорем Ляпунова и результаты Л. Яноша и Ф. Майерса по обращению принципа сжимающих отображений. Все это довольно тонкие и сложные вопросы, но они представляют вполне определенный утилитарный интерес.

## § 1. АДС с дискретным временем

Пусть система функционирует в соответствии с итерационной процедурой (I.1.4), т. е.

$$x^{k+1}=x^k+\Gamma_k[\Phi(x^k)-x^k], \tag{1.1}$$

где $\Phi(x)$ — оператор межэлементных связей, $\Gamma_k=\operatorname{diag}(\gamma_1^k,\ldots,\ \gamma_n^k)$, $\gamma_i^k\in[0,\ 1]$.

Мы уже отмечали, что на последовательности $\{\Gamma_k\}$ здесь надо накладывать некоторые дополнительные ограничения, чтобы можно было говорить о сходимости (1.1). Проще всего это достигается требованием $0<\varepsilon_i\leqslant\gamma_i^k\leqslant 1$. Приведем более общий результат, доказательство которого очевидно.

Теорема 1.1. *Пусть оператор $\Phi$ непрерывен и фиксированная последовательность $\{\Gamma_k\}$ удовлетворяет условию*

$$\forall i:\sum_k^{\infty}\gamma_i^k=\infty; \tag{1.2}$$

*тогда последовательность $x^k$, порождаемая процедурой* (1.1), *не*

* Не следует искать аналогий с ансамблями, которые изучает статистическая физика.

*может сходиться к точке, которая не является неподвижной точкой оператора* $\Phi$. ▲

Если выполняется условие (1.2), то соответствующие траектории (1.1) мы будем называть невырожденными.

Заметим теперь, что итерационная процедура (1.1) представляет собой частный случай процедуры вида

$$x^{k+1} = \bar{f}_k(x^k),$$

в которой оператор $\bar{f}_k$ зависит от номера итерации и заведомо принадлежит некоторому семейству $F$. Этой более общей точки зрения мы и будем пока придерживаться.

Итак, пусть $F$ обозначает семейство непрерывных операторов $\bar{f}$, каждый из которых отображает в себя полное метрическое пространство $(X, \rho)$.

Семейство точечно-множественных отображений

$$F^k(x) = \bigcup \{\bar{f}_k(\ldots(\bar{f}_1(x))) : \bar{f}_i \in F;\ i = 1, \ldots, k\}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

будем называть *АДС с дискретным временем*. При этом всегда будем предполагать, что АДС (семейство $F$) удовлетворяет условию *равномерной непрерывности*:

*для любых $x \in X$ и $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что из $\rho(x, y) < \delta$ следует $\rho(\bar{f}(x), \bar{f}(y)) < \varepsilon$ при любом $\bar{f} \in F$.*

В дальнейшем нас будут интересовать АДС, имеющие положение равновесия $\xi \in X$. *Положением равновесия* АДС мы называем точку $\xi \in X$, которая неподвижна одновременно для всех операторов $\bar{f} \in F$, т. е.

$$\bigcap \{\bar{f}(\xi) : \bar{f} \in F\} = \{\xi\}.$$

Перейдем к определению динамических характеристик АДС.

А1. *Устойчивость: по любой окрестности $W$ точки $\xi$ можно указать окрестность $V$ точки $\xi$ такую, что из $x \in V$ следует $F^k(x) \subset W$ при любом $k \geqslant 0$.*

А2. *Сходимость: $F^k(x) \to \{\xi\}$ при любом $x \in X$.*

А3. *Равномерная сходимость: существует окрестность $U$ точки $\xi$ такая, что*

$$F^k(U) \to \{\xi\}.$$

Условие А2 стоит прокомментировать. Заметим, во-первых, что запись $F^k(x) \to \{\xi\}$ означает следующее: по любой окрестности $V$ множества $\{\xi\}$ (состоящего из одной точки $\xi$) можно указать такое $N > 0$, что для всех $k > N$ будет $F^k(x) \subset V$. Вернемся теперь к частному случаю АДС вида (1.1). Пусть все невырожденные траектории сходятся. В содержательном отношении это может вполне устраивать нас, однако условие сходимости А2 при этом заведомо не выполняется, поскольку ряды (1.2) могут расходиться сколь угодно медленно, а значит, сколь угодно медленно может сходиться процедура (1.1). Выполнения A2 естественно ожидать в том случае, когда действуют ограничения $0<\varepsilon_i\leqslant\leqslant\gamma_i^k\leqslant 1$, или в более общем случае, когда все ряды (1.2) мажорируются снизу некоторым фиксированным расходящимся рядом, например

$$\forall N>0:\ \sum_{k=1}^{N}\gamma_i^k\geqslant\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k}.$$

## § 2. Сходимость и устойчивость

Здесь и далее мы предполагаем, что АДС имеет положение равновесия $\xi\in X$.

Теорема 2.1. *Условие равномерной сходимости влечет за собой устойчивость* $\xi$, *т. е.* $A3\Rightarrow A1$.

Доказательство. Предположим, что сформулированное утверждение неверно. Тогда существует такая окрестность $W$ (точки $\xi$), что для любой последовательности окрестностей $V_k\to\to\{\xi\}$ найдутся такие $x_k\in V_k$, $n_k>0$ и $y_k\in F^{n_k}(x_k)$, что $y_k\notin W$. Без ограничения общности можно считать $x_k\in U$ (окрестность $U$ фигурирует в определении равномерной сходимости). Возможны два варианта: 1) $n_k\to\infty$, тогда $y_k\notin W$ противоречит условию $F^k(U)\to\{\xi\}$, и 2) последовательность $\{n_k\}$ ограничена, тогда $y_k\notin W$ противоречит непрерывности операторов $f\in F$. ▲

Теорема 2.2. *Пусть* $\xi$ *имеет компактную окрестность; тогда* $A1$ *и* $A2$ *влекут за собой справедливость* $A3$.

Заметим, что $\xi$ всегда имеет компактную окрестность, когда $X$ представляет собой подмножество $R^n$ с обычной топологией. Перейдем к доказательству.

Пусть $C$ — компактная окрестность точки $\xi$. Нам нужно указать открытую окрестность $U$ такую, что $F^k(U)\to\{\xi\}$. Положим $U==\operatorname{int}C$. Пусть задана окрестность $V$ точки $\xi$. Из A2 следует существование наименьшего $N(x)$ такого, что $F^k(x)\subset V$ для всех $k\geqslant N(x)$. Чтобы доказать теорему, достаточно установить, что $\sup\{N(x): x\in C\}$ конечен. В противном случае в силу компактности $C$ существует последовательность $x_k\to x^*\in C$ такая, что $N(x_k)\to\infty$. По окрестности $V$ укажем такую окрестность $W$, что из $x\in W$ следует $F^k(x)\subset V$ для всех $k\geqslant 0$ (это можно сделать в силу A1). Из условия A2 вытекает существование наименьшего $\tilde{N}(x)$ такого, что $F^{\tilde{N}(x)}(x)\subset W$. Очевидно, $N(x)\leqslant\tilde{N}(x)$, поэтому из $N(x_k)\to\infty$ следует $\tilde{N}(x_k)\to\infty$. Но $\tilde{N}(x^*)$ конечно, и для $x$, достаточно близких к $x^*$, справедливо равенство $\tilde{N}(x)=\tilde{N}(x^*)$. Полученное противоречие завершает доказательство. ▲

Теорема 2.2 — дискретный аналог известной в теории устойчивости теоремы, утверждающей, что асимптотически устойчивое положение равновесия автономной системы равномерно асимптотически устойчиво. При доказательстве утверждений такого типа довольно часто встречается ошибка, состоящая в том, что смысловой аналог той части доказательства теоремы 2.2, где вводится в рассмотрение функция $\tilde{N}(x)$, отсутствует, и тогда предположение об устойчивости положения равновесия оказывается излишним (остается лишь предположение о сходимости). Тот факт, что присутствие в теореме 2.2 требования устойчивости $\xi$ существенно, а не связано со способом доказательства, вытекает из примеров, рассмотренных в § 4 главы I.

## § 3. Эквивалентные метрики и сжимающие семейства операторов

Оператор $f$, действующий в метрическом пространстве $(X, \rho)$, назовем $\rho$-*сжимающим* ($\rho$-*сжатием*), если для любых $x$, $y \in X$ справедливо неравенство

$$\rho(f(x), f(y)) \leqslant \lambda\rho(x, y)$$

при некотором $\lambda \in (0, 1)$.

*Семейство $F$ операторов* $f$, действующих в $(X, \rho)$, назовем $\rho$-*сжимающим*, если все операторы $f \in F$ являются $\rho$-сжимающими с общим для всех коэффициентом $\lambda \in (0, 1)$.

Совершенно элементарно устанавливается следующий результат.

Теорема 3.1. *Если операторы семейства $F$ имеют общую неподвижную точку $\xi \in X$ и $F$ является $\rho$-сжатием, то справедливы условия* A1—A3. ▲

Поскольку условия A1 — A3 имеют чисто топологический характер, т. е. не зависят от того, какой конкретной метрикой порождается данная топология, правомерно поставить вопрос об обращении теоремы 3.1. Имея это в виду, обсудим предварительно понятие эквивалентности метрик.

*Метрики* $\rho_1$ и $\rho_2$ называются *эквивалентными*, если любая последовательность, фундаментальная по любой одной из них, фундаментальна по другой.

Топологии, порождаемые эквивалентными метриками, совпадают. Если метрики $\rho_1$ и $\rho_2$ эквивалентны и пространство $(X, \rho_1)$ полно, то $(X, \rho_2)$ также полно.

*Метрики* $\rho_1$ и $\rho_2$ назовем *топологически эквивалентными*, если порождаемые ими топологии совпадают. Топологическая эквивалентность метрик $\rho_1$ и $\rho_2$ равносильна, например, следующему требованию: для любых $x \in X$ и $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что

$$\begin{aligned} &\rho_1(x, y) < \delta \Rightarrow \rho_2(x, y) < \varepsilon; \\ &\rho_2(x, y) < \delta \Rightarrow \rho_1(x, y) < \varepsilon. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Если в (3.1) $\delta$ не зависит от $x \in X$, то метрики $\rho_1$ и $\rho_2$ будут эквивалентны.

Тот факт, что из топологической эквивалентности в общем случае не вытекает эквивалентность, подтверждается следующим простым примером. Пусть $X$ представляет собой прямую $R^1 = (-\infty, \infty)$. Метрики

$$\rho_1(x, y) = |x - y| \text{ и } \rho_2(x, y) = |\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y|,$$

очевидно, топологически эквивалентны, но не эквивалентны, так как существует последовательность $x_k = k$, которая по $\rho_2$ фундаментальна, а по $\rho_1$ нет.

Иногда оказывается полезным следующее утверждение, которое легко доказывается.

Лемма 3.1. *Пусть пространства* $(X, \rho_1)$ *и* $(X, \rho_2)$ *полны, а метрики* $\rho_1$ *и* $\rho_2$ *топологически эквивалентны; тогда* $\rho_1$ *и* $\rho_2$ *эквивалентны.* ▲

Семейство $F$ операторов $f$, действующих в $(X, \rho)$, будем называть сжимающим (сжатием), если для любого $\lambda \in (0, 1)$ существует такая метрика $\rho_\lambda$, эквивалентная $\rho$, что $F$ является $\rho_\lambda$-сжатием с коэффициентом $\lambda$.

Центральное место в этом параграфе занимает следующий результат (обращение теоремы 3.1).

Теорема 3.2. *Пусть операторы семейства* $F$ *имеют общую неподвижную точку* $\xi \in X$ *и справедливы условия* A1 — A3; *тогда* $F$ — *сжатие, т. е. по любому* $\lambda \in (0, 1)$ *можно указать такую метрику* $\rho_\lambda$, *эквивалентную исходной, что* $F$ *является* $\rho_\lambda$-*сжатием с коэффициентом* $\lambda$.

Мы не приводим здесь доказательства, так как в § 7 подробно доказана более общая теорема.

Остановимся на причинах, которые выдвигают теорему 3.2 на одно из важных мест. Очевидно, если нам известно, что $F$ — сжатие, то тем самым мы знаем, что существует функционал

$$L(x) = \rho_\lambda(x, \xi),$$

который убывает вдоль любой траектории

$$x^{k+1} = f_k(x^k), \quad f_k \in F,$$

причем $L(x^{k+1}) \leqslant \lambda L(x^k)$. Пусть речь конкретно идет о процедуре (1.1). Зная в этом случае, что существует соответствующий функционал $L(x)$, можно сказать, что этот же функционал будет убывать и на траекториях непрерывной процедуры (I.1.5). Ясно, что наличие этого же функционала (вернее, лишь факт его существования) может оказать серьезную помощь при изучении модифицированных процедур типа (I.3.2). Таким образом, исследовав процедуру (1.1) и установив для нее справедливость условий A1 — A3, мы можем с помощью теоремы 3.2 (и некоторых дополнительных несложных утверждений) делать содержательные выводы о свойствах других процедур (непрерывных, стохастических и т. п.).

Конечно, высказанные соображения были бы существенно обесценены, если бы для установления справедливости условий А1 — А3 у нас не было другого метода помимо поиска функционала, убывающего на траекториях изучаемого процесса. Но такой метод есть, и он описан в следующей главе. Роль теоремы 3.2 не исчерпывается указанными обстоятельствами. Она гарантирует также, что попытки найти подходящий функционал (метрику), по крайней мере принципиально, не обречены на провал. Информация о существовании нужного функционала может быть эффективно использована при доказательстве других теорем. Так, например, доказательство известной теоремы о том, что асимптотически устойчивая система дифференциальных уравнений остается асимптотически устойчивой при достаточно малом изменении правых частей, опирается на существование у системы функции Ляпунова. Аналогичный вопрос может быть поставлен и при изучении итерационного процесса (1.1). Действительно, реальный оператор $\tilde{\Phi}$ от исследуемого $\Phi$ может отличаться. В этой ситуации, вообще говоря, не ясно, влечет ли за собой сходимость и устойчивость процесса (1.1) справедливость аналогичных свойств для этого же процесса, но с оператором $\tilde{\Phi}$. Нетрудно предложить различные варианты положительного решения этого вопроса, основанные на использовании предположения о близости (мы не уточняем в каком смысле) операторов $\Phi$ и $\tilde{\Phi}$ и теоремы 3.2.

## § 4. Об условии равномерной непрерывности ансамбля

С самого начала мы предположили (§ 1), что семейство операторов $F$, порождающее АДС, удовлетворяет условию равномерной непрерывности (РН). Если бы мы не сделали этого, то условие РН можно было бы присовокупить к выводам теоремы 3.1 и надо было бы присовокупить к предположениям теоремы 3.2. Более точно, в теорему 3.2 необходимо было бы включить следующее дополнительное предположение: *найдется метрика, эквивалентная исходной, в которой $F$ удовлетворяет условию РН.* Дело в том, что свойство РН не инвариантно относительно перехода к эквивалентной метрике (легко строятся примеры), и это может быть источником неприятностей при решении конкретных задач. Ниже рассмотрены два частных случая, в которых такие неприятности отсутствуют.

Введем в множестве (семействе) $F$ операторов $f$, действующих в $(X, \rho)$, топологию с помощью метрики

$$\tilde{\rho}(f_1, f_2) = \sup \{\hat{\rho}(f_1(x), f_2(x)) : x \in X\},$$

где $\hat{\rho}$ — некоторая метрика, эквивалентная $\rho$ (в частности, может быть $\hat{\rho}=\rho$).

Теорема 4.1. *Если пространство* $(F, \tilde{\rho})$ *компактно, то условие равномерной непрерывности* $F$ *справедливо в метрике* $\rho$ *(а также любой, ей эквивалентной).*

Предположим, что сформулированное утверждение неверно. Тогда существуют $x \in X$, $\varepsilon > 0$ и последовательности $x^k \to x$ и $f_k \in F$, $f_k \to f$ такие, что

$$\rho(f_k(x), f_k(x^k)) \geqslant \varepsilon. \tag{4.1}$$

С другой стороны,

$$\hat{\rho}(f(x), f_k(x^k)) \leqslant \rho(f(x), f(x^k)) + \rho(f(x^k), f_k(x^k)) \leqslant$$
$$\leqslant \rho(f(x), f(x^k)) + \tilde{\rho}(f, f_k) \to 0,$$

но это противоречит (4.1). ▲

В качестве $\hat{\rho}$ часто удобно выбирать

$$\hat{\rho}(x, y) = \min\{1, \rho(x, y)\}. \tag{4.2}$$

Теорема 4.2. *Если* $(X, \rho)$ — *компакт, то свойство РН сохраняется при переходе к эквивалентной метрике.*

Предположим противное. Свойство РН выполняется в $(X, \rho)$, метрика $\rho_1$ эквивалентна $\rho$, РН не имеет места в $(X, \rho_1)$. Тогда найдутся такие $x \in X$, $\varepsilon > 0$ и последовательности $x^k \to x$ и $f_k \in F$, что

$$\rho(f_k(x), f_k(x^k)) \to 0, \qquad \rho_1(f_k(x), f_k(x^k)) \geqslant \varepsilon > 0.$$

В силу компактности $(X, \rho)$ можно считать, что последовательности $f_k(x)$ и $f_k(x^k)$ сходятся (к одному и тому же пределу). Но тогда $\rho_1(\ldots) \geqslant \varepsilon$ противоречит эквивалентности метрик $\rho$ и $\rho_1$. ▲

## § 5. АДС с непрерывным временем

Рассмотрим семейство операторов

$$\mathfrak{F} = \{f_t^\Gamma : \Gamma \in \Omega,\ t \in [0, \infty)\}. \tag{5.1}$$

Каждый оператор $f_t^\Gamma \in \mathfrak{F}$ отображает в себя полное метрическое пространство $(X, \rho)$, непрерывен, и $f_0^\Gamma(x) = x$ для любых $x \in X$ и $\Gamma \in \Omega$.

Будем предполагать также, что семейство $\mathfrak{F}$ обладает следующим *полугрупповым свойством*: для любых $\Gamma_1$, $\Gamma_2$ из $\Omega$ и любых $t_1 \geqslant 0$ и $t_2 \geqslant 0$ найдется элемент $\Gamma \in \Omega$ такой, что

$$f_{t_1}^{\Gamma_1} f_{t_2}^{\Gamma_2} = f_{t_1+t_2}^{\Gamma}.$$

Семейство точечно-множественных отображений

$$F_t(x) = \bigcup\{f_t^\Gamma(x) : \Gamma \in \Omega\} \quad (t \geqslant 0)$$

будем называть *ансамблем динамических систем* (*АДС*) *с непрерывным временем.*

Так же как в дискретном случае, будем предполагать, что АДС удовлетворяет условию *равномерной непрерывности* (*РН*):

*для любых* $T > 0$, $x \in X$ и $\varepsilon > 0$ *можно указать такое* $\delta > 0$, *что из* $\rho(x, y) < \delta$ *следует*

$$\rho(f_t^\Gamma(x), f_t^\Gamma(y)) < \varepsilon$$

*для любых* $\Gamma \in \Omega$ *и* $t \in [0, T]$.

Положением равновесия АДС будем называть точку $\xi \in X$, которая неподвижна одновременно для всех операторов $f_t^\Gamma \in \mathfrak{F}$, т. е.

$$\bigcap \{f_t^\Gamma(\xi) : \Gamma \in \Omega, t \geqslant 0\} = \{\xi\}.$$

Как и в дискретном случае, введем три динамические характеристики:

B1. *Устойчивость: по любой окрестности* $W$ *точки* $\xi$ *можно указать окрестность* $V$ *точки* $\xi$ *такую, что из* $x \in V$ *следует* $F_t(x) \subset W$ *при любом* $t \geqslant 0$.

B2. *Сходимость:* $F_t(x) \to \{\xi\}$ *при* $t \to \infty$ *для любого* $x \in X$.

B3. *Равномерная сходимость: существует окрестность* $U$ *точки* $\xi$ *такая, что*

$$F_t(U) \to \{\xi\}.$$

Мы будем в дальнейшем сталкиваться с АДС, которые представляют собой семейства операторов сдвига по траекториям дифференциальных процедур типа (I.1.5), т. е.

$$\dot{x} = \Gamma(t) G(x). \tag{5.2}$$

В тех случаях, когда процедура (5.2) задает ансамбль, будем, как правило, считать, что

$$\forall i : 0 < \varepsilon_i \leqslant \gamma_i(t) \leqslant M_i < \infty$$

и каждая функция $\gamma_i(t)$ суммируема (или кусочно-непрерывна) на любом конечном сегменте.

Легко видеть, что в этих случаях множество допустимых функций $\Gamma(t)$ (множество $\Omega$) обладает следующими свойствами:

a$^0$. *Инвариантность относительно сдвига по времени*
$\forall t, \tau \geqslant 0, \Gamma(t) \in \Omega : \Gamma(t+\tau) \in \Omega$.

b$^0$. $\forall t_0, t \geqslant 0,\ \Gamma_1, \Gamma_2 \in \Omega : \mathrm{sg}(t_0 - t)\Gamma_1(t) + \mathrm{sg}(t - t_0)\Gamma_2(t) \in \Omega$, где $\mathrm{sg}(\alpha \geqslant 0) = 1$, $\mathrm{sg}(\alpha < 0) = 0$.

Свойство a$^0$, несмотря на то, что каждая система из множества (5.2) не автономна, позволяет ограничиться изучением движений, начинающихся в нулевой момент времени. Условие $\mathrm{b}^0$ обеспечивает наличие у АНС полугруппового свойства.

Конечно, чтобы говорить об АДС как о семействе операторов сдвига по траекториям (5.2), надо располагать теоремами о существовании этих траекторий, их нелокальной продолжимости и т. п. Эти вопросы рассматриваются в конце главы. Пока же мы займемся изучением свойств АДС независимо от происхождения последних.

## § 6. Сжимающие полугруппы

*Семейство* $\mathfrak{F}$ операторов $f_t^\Gamma$ назовем $\rho$-*сжимающим*, если для любых $x, y \in X$, $\Gamma \in \Omega$, $t \geqslant 0$ имеет место неравенство

$$\rho(f_t^\Gamma(x), f_t^\Gamma(y)) \leqslant \lambda^t \rho(x, y) \quad (\lambda \in (0, 1)).$$

*Семейство* $\mathfrak{F}$ назовем *сжимающим* (*сжатием*), если для любого $\lambda \in (0, 1)$ существует такая метрика $\rho_\lambda$, эквивалентная исходной, что $F$ является $\rho_\lambda$-сжатием с коэффициентом $\lambda$.

Совершенно элементарно устанавливается следующий результат.

Теорема 6.1. *Пусть операторы $f_t^\Gamma$ имеют общую неподвижную точку $\xi \in X$, а $\mathfrak{F}$ является $\rho$-сжатием; тогда справедливы условия* B1—B3. ▲

Теорема 6.1 допускает следующее обращение.

Теорема 6.2. *Пусть операторы $f_t^\Gamma$ семейства $\mathfrak{F}$ имеют общую неподвижную точку $\xi \in X$ и справедливы условия* B1 — B3; *тогда $\mathfrak{F}$ — сжатие, т. е. по любому $\lambda \in (0, 1)$ можно указать такую метрику $\rho_\lambda$, эквивалентную исходной, что $\mathfrak{F}$ является $\rho_\lambda$-сжатием с коэффициентом $\lambda$.*

Доказательство теоремы 6.2 дано в § 7.

Относительно условия РН здесь можно сделать по смыслу те же замечания, что и в § 4 (и можно установить очевидные аналоги теорем 4.1 и 4.2).

Предположим теперь выполненным *усиленное условие РН*: *для любых $x \in X$, $t \geqslant 0$ и $\varepsilon > 0$ можно указать такие $\delta_1 > 0$ и $\delta_2 > 0$, что из $\rho(x, y) < \delta_1$, $|t-s| < \delta_2$ следует*

$$\rho(f_t^\Gamma(x), f_s^\Gamma(x)) < \varepsilon$$

*для любого* $\Gamma \in \Omega$.

Лемма 6.1. *Усиленное условие РН влечет за собой РН.*

Сформулируем отрицание утверждения леммы. Существуют $x \in X$, $T > 0$ и $\varepsilon > 0$, для которых найдутся последовательности $x_k \to x$, $\Gamma_k \in \Omega$, $t_k \in [0, T]$ такие, что

$$\rho(f_{t_k}^{\Gamma_k}(x), \; f_{t_k}^{\Gamma_k}(x_k)) \geqslant \varepsilon. \qquad (6.1)$$

С другой стороны (без ограничения общности можно считать $t_k \to t$),

$$\rho(f_{t_k}^{\Gamma_{k'}}(x), f_{t_k}^{\Gamma_k}(x_k)) \leqslant \rho(f_{t_k}^{\Gamma_k}(x), f_t^{\Gamma_k}(x)) + \rho(f_t^{\Gamma_k}(x), f_{t_k}^{\Gamma_k}(x_k)) \to 0,$$

что вступает в противоречие с (6.1). ▲

Приведем теперь без доказательства аналоги теорем 2.1, 2.2 (в предположении, что выполняется усиленное условие PH).

Теорема 6.3. *Условие равномерной сходимости влечет за собой устойчивость* $\xi$, *т. е.* B3⇒B1. ▲

Теорема 6.4. *Пусть* $\xi$ *имеет компактную окрестность; тогда* B1 *и* B2 *влекут за собой справедливость* B3. ▲

В заключение параграфа рассмотрим семейство $\mathfrak{F}$ частного вида (множество $\Omega$ состоит из единственного элемента)

$$\mathfrak{F} = \{f_t : t \in [0, \infty)\}. \tag{6.2}$$

В данном случае $\mathfrak{F}$ можно интерпретировать как семейство операторов сдвига по траекториям некоторой автономной системы дифференциальных уравнений. При выполнении некоторых дополнительных условий семейство (6.2) принято также называть *динамической системой*. Условие B1 при этом означает обычную устойчивость по Ляпунову, B1 в совокупности с B2 — условие (глобальной) асимптотической устойчивости, B3 означает равномерную асимптотическую устойчивость.

Непосредственно из теоремы 6.2 вытекает следующий результат.

Теорема 6.5. *Пусть асимптотически устойчивое положение равновесия* $\xi \in X$ *динамической системы равномерно асимптотически устойчиво. Тогда для любого* $\lambda \in (0, 1)$ *найдется эквивалентная исходной метрика* $\rho_\lambda$ *такая, что*

$$\rho_\lambda(f_t(x), f_t(y)) \leqslant \lambda^t \rho(x, y). \ ▲$$

Легко видеть, что в данном случае $L_\lambda(x) = \rho_\lambda(\xi, x)$ — функция Ляпунова, которая строго убывает на любой траектории, пока изображающая точка не достигнет $\xi$.

## § 7. Доказательство основной теоремы

В этом параграфе мы докажем теорему 6.2. Отметим сразу, что при этом автоматически оказывается доказанной теорема 3.2. Дело в том, что теорема 6.2 остается справедливой, если параметр $t$, фигурирующий в определении семейства $\mathfrak{F}$, принимает значения не обязательно из $[0, \infty)$, а из любого неограниченного множества $\mathcal{N} \subset [0, \infty)$ такого, что $0 \in \mathcal{N}$, и из $t_1 \in \mathcal{N}$, $t_2 \in \mathcal{N}$ следует $t_1 + t_2 \in \mathcal{N}$. Только эти свойства множества $[0, \infty)$ используются далее*. Нетрудно видеть, что в частном случае

* В случае $t \in \mathcal{N}$ все дальнейшие рассуждения и выкладки сохраняются. Надо лишь $t \geqslant 0$ заменить на $t \in \mathcal{N}$, а вместо $[0, T]$ писать $[0, T] \cap \mathcal{N}$.

$\mathcal{N}=\{0, 1, 2, \ldots\}$ обобщенная в указанном выше смысле теорема 6.2 переходит в теорему 3.2.

Перейдем к доказательству теоремы 6.2. Для этого установим предварительно несколько вспомогательных результатов.

Лемма 7.1. *Пусть справедливы условия* B1 *и* B3. *Тогда существует замкнутая окрестность* $H_0$ *точки* $\xi$ *такая, что* $F_t(H_0)\to\{\xi\}$ *и* $F_t(H_0)\subset H_0$ *при любом* $t\geqslant 0$.

Доказательство. Возьмем произвольную замкнутую окрестность (точки $\xi$) $H\subset U$ (окрестность $U$ фигурирует в формулировке B3). Очевидно, $F_t(H)\to\{\xi\}$. Определим $T>0$ из условия: $F_t(H)\subset H$ для всех $t\geqslant T$ и положим

$$H_0=\bigcap\{H^t : t\in[0, T]\}, \tag{7.1}$$

где $H^t=\{x \mid F_t(x)\subset H\}$.

Эквивалентная (7.1) запись

$$H_0=\bigcap\{f_{-t}^{\Gamma}(H) : t\in[0, T],\ \Gamma\in\Omega\}$$

показывает, что множество $H_0$ замкнуто [замкнутость прообразов $f_{-t}^{\Gamma}(H)$ вытекает из непрерывности отображений $f_t^{\Gamma}$].

Отметим, что множество $H_0$ непусто, так как заведомо $\xi\in H_0$. Кроме того, по окрестности $\operatorname{int} H$ можно указать открытую окрестность $V$ (в силу устойчивости B1) такую, что из $x\in V$ вытекает $F_t(x)\subset\operatorname{int} H$ при любом $t\geqslant 0$. Ясно, что $V\subset H_0$. Итак, $H_0$ — замкнутая окрестность точки $\xi$. Наконец, $F_t(H_0)\to\{\xi\}$, поскольку $H_0\subset H\subset U$.

Покажем теперь, что для любого $s\geqslant 0$ справедливо включение $F_s(H_0)\subset H_0$. Пусть $x\in H_0$, т. е.

$$\forall t\in[0, T] : F_t(x)\subset H.$$

Нам достаточно показать, что

$$F_t(F_s(x))=F_{t+s}(x)\subset H$$

при любом $t\in[0, T]$. Если $s\geqslant T$, то $F_{t+s}(x)\subset H$ при $t\geqslant 0$ следует из определения $T$. Пусть $0\leqslant s<T$, тогда $F_{t+s}(x)\subset H$ для $t\in[0. T-s]$ вытекает из определения $H_0$, для $t\in[T-s, T]$ — из определения $T$. ▲

Лемма 7.2. *Пусть имеют место условия* B1 — B3; *тогда существует метрика* $\rho^*$, *эквивалентная исходной, по которой семейство* $F$ — *нерастягивающее, т. е.*

$$\rho^*(f_t^{\Gamma}(x), f_t^{\Gamma}(y))\leqslant\rho^*(x, y) \tag{7.2}$$

*для любых* $x, y\in X$, $\Gamma\in\Omega$, $t\geqslant 0$.

Доказательство. Перейдем от исходной метрики $\rho$ к эквивалентной $\hat\rho(x, y)=\min(1, \rho(x, y))$ и положим

$$\rho^*(x, y)=\sup\{\hat\rho(f_t^{\Gamma}(x), f_t^{\Gamma}(y)) : \Gamma\in\Omega,\ t\geqslant 0\}.$$

Аксиомы метрики проверяются без труда. Свойство (7.2) также очевидно. Действительно,

$$\rho^*(f_t^\Gamma(x), f_t^\Gamma(y)) = \sup\{\hat\rho(f_s^{\Gamma_1}(f_t^\Gamma(x)), \quad f_s^{\Gamma_1}(f_t^\Gamma(y))) : \Gamma_1 \in \Omega, \ s \geqslant 0\} \leqslant$$
$$\leqslant \sup\{\hat\rho(f_{t+s}^\Gamma(x), f_{t+s}^\Gamma(y)) : \Gamma \in \Omega, s \geqslant 0\} \leqslant$$
$$\leqslant \sup\{\hat\rho(f_s^\Gamma(x), f_s^\Gamma(y)) : \Gamma \in \Omega, s \geqslant 0\} = \rho^*(x, y).$$

Покажем теперь эквивалентность метрик $\rho^*$ и $\hat\rho$ (откуда будет следовать эквивалентность $\rho^*$ и $\rho$). Заметим предварительно, что свойство РН (равномерной непрерывности) сохраняется в метрике $\hat\rho$.

Пусть теперь задано некоторое $\varepsilon > 0$. Из $F_t(H_0) \to \{\xi\}$ следует существование такого $T > 0$, что

$$\operatorname{diam}_{\hat\rho} F_t(H_0) < \varepsilon \text{ для } t \geqslant T.$$

Кроме того, для любого $x \in X$ из условий В2 и РН следует существование такого $T_1 > 0$, что при достаточно малом $\hat\rho(x, y)$ будет

$$\forall \Gamma \in \Omega : f_{T_1}^\Gamma(x) \in H_0, \ f_{T_1}^\Gamma(y) \in H_0.$$

Опять из условия РН вытекает, что всегда можно добиться [делая $\hat\rho(x, y)$ достаточно малым], чтобы

$$\hat\rho(f_t^\Gamma(x), f_t^\Gamma(y)) < \varepsilon \text{ для } t \in [0, T + T_1], \Gamma \in \Omega.$$

Сопоставляя полученные неравенства с определением $\rho^*$ и учитывая свойство $F_t(H_0) \subset H_0$ (лемма 7.1), приходим к выводу: по любому $\varepsilon < 0$ можно указать $\delta > 0$ такое, что из $\hat\rho(x, y) < \delta$ вытекает $\rho^*(x, y) < \varepsilon$. Кроме того, по определению $\hat\rho(x, y) \leqslant \leqslant \rho^*(x, y)$. Следовательно, метрики $\hat\rho$ и $\rho^*$ топологически эквивалентны.

Докажем теперь полноту пространства $(X, \rho^*)$. Из эквивалентности $\rho$ и $\hat\rho$ и полноты исходного пространства $(X, \rho)$ следует полнота $(X, \hat\rho)$. В силу $\hat\rho \leqslant \rho^*$ любая последовательность, фундаментальная по метрике $\rho^*$, фундаментальна по $\hat\rho$ и, следовательно, сходится по $\hat\rho$. Но тогда в силу топологической эквивалентности эта последовательность сходится и по метрике $\rho^*$. Таким образом, $(X, \rho^*)$ полно. Далее остается сослаться на лемму 3.1. ▲

Введем теперь понятие *$d_\lambda$-геодезического преобразования метрики*. Рассмотрим семейство

$$\mathscr{H} = \{H_t \mid t \in (-\infty, \infty)\}$$

замкнутых множеств $H_t$, удовлетворяющее следующим условиям:

1) $H_t \to \{\xi\}$ при $t \to \infty$;
2) $H_{t_1} \subset H_{t_2}$, если $t_1 \geqslant t_2$;
3) $\forall t \in (-\infty, \infty): \xi \in H_t$;
4) для любого $x \in X$ найдется такое $t(x) \in (-\infty, \infty)$, что $x \in H_{t(x)}$ вместе с некоторой своей окрестностью.

Введем далее в рассмотрение функцию

$$\nu(x, y) = \min(\nu(x), \nu(y)),$$

где

$$\nu(x) = \max\{t : x \in H_t\}, \quad \nu(\xi) = \infty.$$

С помощью $\nu(x, y)$ определим функционал

$$d_\lambda(x, y) = \lambda^{\nu(x,y)} \rho(x, y), \quad \lambda \in (0, 1).$$

Через $\Omega_{xy}$ обозначим множество конечных цепей

$$\omega_{xy} = \{x = x_0, x_1, \ldots, x_m = y\}$$

и положим «длину» цепи равной

$$D_\lambda(\omega_{xy}) = \sum_{i=1}^{m} d_\lambda(x_{i-1}, x_i).$$

Назовем теперь функционал

$$\rho_\lambda(x, y) = \inf\{D_\lambda(\omega_{xy}) : \omega_{xy} \in \Omega_{xy}\}$$

*$d_\lambda$-геодезическим преобразованием метрики* $\rho$.

Лемма 7.3. *Любое $d_\lambda$-геодезическое преобразование метрики $\rho$ — метрика, эквивалентная* $\rho$.

Доказательство. Прежде всего убедимся, что $\rho_\lambda(x, y)$ — метрика. Очевидно, $\rho_\lambda(x, y) = \rho_\lambda(y, x)$, $\rho_\lambda(x, x) = 0$ и, наконец, неравенство треугольника — следствие включения $\Omega_{xz} \cup \Omega_{zy} \subset \Omega_{xy}$. Осталось показать положительную определенность $\rho_\lambda(x, y)$. Пусть $y \neq \xi$ и без ограничения общности $\nu(y) \geqslant \nu(x)$. Тогда [поскольку любая цепь $\omega_{xy}$ либо полностью лежит в $X \setminus H_{\nu(y)+\Delta}$ $(\Delta > 0)$, либо нет]

$$\rho_\lambda(x, y) \geqslant \lambda^{\nu(y)} \min\{\rho(x, y), \rho(y, H_{\nu(y)+\Delta})\} > 0.$$

В случае $y = \xi$

$$\rho_\lambda(x, \xi) \geqslant \lambda^{\nu(x)} \rho(x, H_{\nu(x)+\Delta}) > 0.$$

Итак, $\rho_\lambda$ — метрика.

Покажем теперь топологическую эквивалентность метрик $\rho$ и $\rho_\lambda$. Рассмотрим случай $x \neq \xi$. Пусть $\Delta > 0$ выбрано так, что $x \in H_{\nu(x)-\Delta}$. Без ограничения общности можно считать $\nu(y) \geqslant \nu(x)$.

Очевидно,

$$\rho_\lambda(x, y) \leqslant \lambda^{\nu(x)-\Delta} \min\{\rho(x, y),\ \rho(x, X \setminus H_{\nu(x)-\Delta})\}.$$

Пусть теперь дано $\varepsilon > 0$. Чтобы было $\rho_\lambda(x, y) < \varepsilon$, достаточно положить

$$\rho(x, y) < \delta = \varepsilon\lambda^{-\nu(x)+\Delta} \min\{1,\ \rho(x, X \setminus H_{\nu(x)-\Delta})\},$$

поэтому из $x_k \xrightarrow{\rho} x$ следует $x_k \xrightarrow{\rho_\lambda} x$.

Докажем обратную импликацию. Пусть без ограничения общности $\nu(y) \leqslant \nu(x)$, тогда

$$\rho_\lambda(x, y) \geqslant \lambda^{\nu(x)+\Delta} \min\{\rho(x, y),\ \rho(x, H_{\nu(x)+\Delta})\}. \tag{7.3}$$

Пусть теперь задано $\varepsilon > 0$, которое можно считать меньшим $\rho(x, H_{\nu(x)+\Delta})$. Тогда $\rho(x, y) < \varepsilon$ следует из $\rho_\lambda(x, y) < \delta = \varepsilon\lambda^{\nu(x)+\Delta}$. Отсюда вытекает $x_k \xrightarrow{\rho} x$, если $x_k \xrightarrow{\rho_\lambda} x$.

Пусть, наконец, $x = \xi$. Положим без ограничения общности $y \in H_0$, тогда

$$\rho_\lambda(\xi, y) \leqslant d_\lambda(\xi, y) \leqslant \rho(\xi, y).$$

Следовательно, $x_k \xrightarrow{\rho_\lambda} \xi$, если $x_k \xrightarrow{\rho} \xi$.

С другой стороны, для любого $\varepsilon > 0$ из $H_t \to \{\xi\}$ вытекает существование такого $T > 0$, что $\operatorname{diam} H_T < \varepsilon/2$. Тогда из $\rho(\xi, y) > \varepsilon$ вытекает $\rho(y, H_T) > \varepsilon/2$, откуда

$$\rho_\lambda(\xi, y) \geqslant \rho_\lambda(H_T, y) > \lambda^T \varepsilon/2.$$

Следовательно, чтобы выполнялось $\rho(\xi, y) < \varepsilon$, достаточно положить $\rho_\lambda(\xi, y) < \delta = \varepsilon\lambda^{-T}$. Итак, метрики $\rho$ и $\rho_\lambda$ топологически эквивалентны.

Докажем теперь полноту пространства $(X, \rho_\lambda)$. Пусть последовательность $x_k$ фундаментальна по метрике $\rho_\lambda$. Если $x_k$ не сходится к $\xi$, то

$$\forall k \geqslant 0 : \nu(x_k) < \nu < \infty, \text{ т. е. } x_k \notin H_\nu.$$

Возьмем

$$\alpha = \inf\{\rho(x, H_{\nu+\Delta}) : x \notin H_\nu\} > 0 \quad (\Delta > 0).$$

В силу фундаментальности $x_k$ по $\rho_\lambda$ для достаточно больших $k$ будет справедлива оценка

$$\rho_\lambda(x_k, x_{k+j}) < \alpha\lambda^{\nu+\Delta} \quad (j \geqslant k);$$

но тогда из (7.3) следует

$$\lambda^{-\nu-\Delta}\rho_\lambda(x_k, x_{k+j}) \geqslant \rho(x_k, x_{k+j}).$$

Отсюда вытекает, что $x_k$ фундаментальна по $\rho$ и поэтому сходится по $\rho$ [пространство $(X, \rho)$ полно]. Но тогда в силу топологической эквивалентности $\rho$ и $\rho_\lambda$, $x_k$ сходится и по $\rho_\lambda$. ▲

Доказательство теоремы 6.2. С помощью замкнутой окрестности $H_0$ (лемма 7.2) построим семейство $\mathscr{H} = \{H_t \mid t \in (-\infty, \infty)\}$ следующим образом:

$$H_t = \mathrm{cl}\, F_t(H_0) = \mathrm{cl} \bigcup \{f_t^\Gamma(H_0) : \Gamma \in \Omega\}, \quad t \geqslant 0;$$

$$H_{-t} = F_{-t}(H_0) = \bigcap \{f_{-t}^\Gamma(H_0) : \Gamma \in \Omega\}, \quad t \geqslant 0.$$

Легко проверить, что семейство $\mathscr{H}$ удовлетворяет всем необходимым условиям. Теперь с помощью $d_\lambda$-геодезического преобразования [при любом заданном $\lambda \in (0, 1)$] перейдем от метрики $\rho^*$ (лемма 7.2) к метрике $\rho_\lambda^*$, которая и будет искомой. Эквивалентность $\rho$ и $\overset{*}{\rho}_\lambda$ следует из лемм 7.1—7.3. Из определения семейства $\mathscr{H}$ и функции $\nu(x)$ вытекает справедливость неравенства

$$\nu(f_t^\Gamma(x)) \geqslant \nu(x) + t \quad (\Gamma \in \Omega,\ x \in X,\ t \geqslant 0),$$

из которого в свою очередь следует

$$d_\lambda(f_t^\Gamma(x), f_t^\Gamma(y)) \leqslant \lambda^t d_\lambda(x, y)$$

и, наконец,

$$\overset{*}{\rho}_\lambda(f_t^\Gamma(x), f_t^\Gamma(y)) \leqslant \lambda^t \overset{*}{\rho}_\lambda(x, y). \ ▲$$

## § 8. Полугруппы линейных операторов

В том случае, когда операторы изучаемого семейства отображают в себя $R^n$, в рамках предшествующего круга проблем естественно поставить более сильный вопрос. Если раньше мы интересовались существованием подходящей метрики эквивалентной исходной, то теперь можно задаться целью выяснить условия, при которых существует подходящая норма*. Этот вопрос мы рассмотрим для частного случая семейства

$$\mathfrak{F} = \{f_t^\Gamma : \Gamma \in \Omega,\ t \in [0, \infty)\} \tag{8.1}$$

линейных операторов $f_t^\Gamma$, действующих в $R^n$. В остальном семейство $\mathfrak{F}$ удовлетворяет тем же предположениям, что и (5.1). Поскольку операторы $f_t^\Gamma$ линейные, общей неподвижной точкой для (8.1) будет $\xi = 0$.

*Семейство* $\mathfrak{F}$ назовем *сжимающим* (*сжатием*), если для некоторого $\lambda \in (0, 1)$ существует норма $\|\cdot\|_*$ такая, что для любых $x$,

---

* Об эквивалентности норм здесь можно не упоминать, так как все нормы в $R^n$ эквивалентны.

$y \in R^n$, $\Gamma \in \Omega$, $t \geqslant 0$ выполняется неравенство *

$$\| f_t^{\Gamma}(x) - f_t^{\Gamma}(y) \|_* \leqslant \lambda^t \| x - y \|_* \tag{8.2}$$

или равносильно $\| f_t^{\Gamma}(x) \|_* \leqslant \lambda^t \| x \|_*$.

Если справедливо (8.2), то очевидно, что при переходе к любой другой норме $\|\cdot\|$ найдутся такие $T>0$ и $q \in (0, 1)$, что

$$\| f_T^{\Gamma}(x) \| \leqslant q \| x \| \tag{8.3}$$

для любых $x \in R^n$, $\Gamma \in \Omega$. (Это легко показать, если учесть известный факт: любые две нормы $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|_*$ в $R^n$ эквивалентны, а значит, существуют $m_1 > 0$ и $m_2 > 0$ такие, что $\| x \| \leqslant m_1 \| x \|_*$, $\| x \|_* \leqslant \leqslant m_2 \| x \|$). Справедливо также обратное утверждение.

Теорема 8.1. *Пусть существуют $T>0$ и $q \in (0, 1)$ такие, что для любых $x \in R^n$ и $\Gamma \in \Omega$ справедливо неравенство* (8.3); *тогда $\mathfrak{F}$ — сжатие.*

Доказательство сводится к установлению того, что функционал

$$\| x \|_* = \sup \{ q^{-\frac{t}{T}} \| f_t^{\Gamma}(x) \| : \Gamma \in \Omega, t \geqslant 0 \}$$

— действительно норма в $R^n$, и по этой норме при $\lambda = \sqrt[T]{q}$ выполняется неравенство (8.2). ▲

С помощью теоремы 8.1 легко устанавливается аналог теоремы 6.2.

Теорема 8.2. *Пусть семейство линейных операторов* (8.1) *удовлетворяет условиям В1—В3; тогда $\mathfrak{F}$ — сжатие.* ▲

Указанные результаты остаются справедливыми, если параметр $t$, фигурирующий в определении семейства $\mathfrak{F}$, принимает лишь целочисленные значения. Это замечание позволяет сформулировать на основе теорем 8.1 и 8.2 аналогичные утверждения для семейств линейных операторов типа тех, которые рассматривались в § 1.

## § 9. Единственность решений дифференциальных уравнений

В § 5 уже отмечалось, что в случае непрерывного времени мы будем, как правило, сталкиваться с изучением АДС, которые представляют собой семейства операторов сдвига по траекториям семейства дифференциальных уравнений вида $\dot{x} = \Gamma(t) G(x)$. В этом параграфе мы ограничимся изучением част-

---

* Обратим внимание, что в отличие от предыдущего в определении сжимающего семейства в $R^n$ утверждается существование подходящей нормы не для любого, а лишь для некоторого $\lambda \in (0, 1)$. Необходимость такого изменения очевидна.

ного случая одного дифференциального уравнения при условии непрерывности $\Gamma(t)$. Теоремы существования и единственности здесь не только являются шагом на пути к общему рассмотрению вопроса (см. § 11), но и представляют для дальнейшего самостоятельный интерес. Дело в том, что далее нам придется переходить от дифференциального описания системы к ее описанию с помощью операторов сдвига не только в тех случаях, когда соответствующее семейство операторов сдвига удовлетворяет аксиомам ансамбля, но и в других, например, когда вектор-функции $\Gamma(t)$ непрерывны *.

Пока мы займемся изложением некоторых вспомогательных сведений, которые потребуются в дальнейшем.

Начнем с дифференциальных неравенств. Пусть $L(t, \alpha)$ — непрерывная по совокупности своих скалярных переменных функция и для $t \in [t_0, t_1]$ функции $\alpha(t)$, $\beta(t)$ удовлетворяют условиям

$$\frac{d\alpha}{dt} = L(t, \alpha), \qquad \frac{d\beta}{dt} \leqslant L(t, \beta).$$

Легко видеть, что тогда из неравенства $\beta(t_0) \leqslant \alpha(t_0)$ следует

$$\beta(t) \leqslant \alpha(t), \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_1.$$

Это простое утверждение весьма эффективно можно использовать при доказательстве теорем единственности. Его незначительное усиление позволяет получить в этом направлении существенно более общие результаты.

Обозначим через $D^*$ верхнее правое производное число Дини

$$D^*\alpha(t) = \overline{\lim_{\Delta t \to +0}} \frac{\alpha(t + \Delta t) - \alpha(t)}{\Delta t}.$$

Лемма 9.1. *Пусть функции* $\alpha(t)$, $\beta(t)$ *непрерывны и для* $t \in [t_0, t_1]$

$$\frac{d\alpha}{dt} = L(t, \alpha), \qquad D^*\beta(t) \leqslant L(t, \beta);$$

*тогда из* $\beta(t_0) \leqslant \alpha(t_0)$ *следует* $\beta(t) \leqslant \alpha(t)$ $(t \in [t_0, t_1])$. ▲

Дадим теперь определение полудифференцируемых функций и опишем их свойства. Функцию $\varphi(\boldsymbol{x}) = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ назовем полудифференцируемой на $X \subset R^n$, если для любых $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{h} \in X$

$$\varphi(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{h}) - \varphi(\boldsymbol{x}) \leqslant M(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{h}) + \varepsilon(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{h}),$$

причем функция $M(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{h})$ при любом фиксированном $\boldsymbol{x}$ непрерывна по $\boldsymbol{h}$ и при малых по норме $\boldsymbol{h}$

$$M(\boldsymbol{x}, \tau\boldsymbol{h}) \leqslant \tau M(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{h}) \quad (\tau \in [0, 1]);$$

---

* Заметим, что в случае кусочно-непрерывных $\Gamma(t)$ соответствующее решение можно получать «склеиванием» кусков.

кроме того,

$$\lim_{\|h\|\to 0} \frac{\varepsilon(x, h)}{\|h\|} = 0.$$

Функцию $M(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{h})$ будем называть полудифференциалом $\varphi(\boldsymbol{x})$.

Легко видеть, что для непрерывно дифференцируемой функции $\varphi(\boldsymbol{x})$ полудифференциал можно определить равенством

$$M(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{h}) = (\boldsymbol{h}, \operatorname{grad} \varphi(\boldsymbol{x})).$$

В случае $\varphi(\boldsymbol{x}) = \|\boldsymbol{x}\|$ можно положить

$$M(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{h}) = \|\boldsymbol{h}\|,$$

однако для различных конкретных норм можно подыскать различные другие полудифференциалы, которые более точно оценивают приращение функции $\varphi(\boldsymbol{x}) = \|\boldsymbol{x}\|$.

В дальнейшем вектор-функции $\boldsymbol{x}(t)$ мы будем сопоставлять некоторую скалярную функцию

$$\xi(t) = \varphi[\boldsymbol{x}(t)].$$

Лемма 9.2. *Пусть $M(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{h})$—полудиффэренциал $\varphi(\boldsymbol{x})$, тогда*

$$D^*\xi(t) \leqslant M\left[x(t), \frac{dx(t)}{dt}\right]. \ \blacktriangle \tag{9.1}$$

Перейдем теперь к описанию общего метода, позволяющего устанавливать единственность решения дифференциального уравнения вида

$$\dot{\boldsymbol{x}} = F(t, \boldsymbol{x}). \tag{9.2}$$

Допустим, что одному и тому же начальному условию соответствуют два различных решения (9.2) $\boldsymbol{x}(t)$ и $\boldsymbol{y}(t)$, определенных на сегменте $[t_0, t_1]$. В этом случае вектор-функция $\boldsymbol{z}(t) = \boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{y}(t)$—решение дифференциального уравнения

$$\dot{\boldsymbol{z}} = F[t, \boldsymbol{y}(t) + \boldsymbol{z}] - F[t, \boldsymbol{y}(t)]$$

при нулевом начальном условии $\boldsymbol{z}(t_0) = 0$.

Сопоставим теперь $\boldsymbol{z}(t)$ скалярную функцию

$$\xi(t) = \varphi[\boldsymbol{z}(t)],$$

где функция $\varphi(\boldsymbol{x})$ имеет полудифференциал $M(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{h})$, определена в окрестности нуля и удовлетворяет требованиям

$$\varphi(0) = 0, \ \varphi(\boldsymbol{x}) > 0 \quad \text{при } \boldsymbol{x} \neq 0.$$

Дальнейший путь достаточно прозрачен. Надо подобрать задачу

$$\dot{\alpha} = L(t, \alpha), \qquad \alpha(t_0) = 0, \tag{9.3}$$

имеющую заведомо единственное решение $\alpha(t)\equiv 0$, а затем попытаться использовать лемму 9.1 и получить $\xi(t)\leqslant\alpha(t)$.

Для реализации этой программы заметим, что в силу леммы 9.2

$$D^*\xi(t)\leqslant M\left[z(t),\ \frac{dz}{dt}\right],$$

т. е.

$$D^*\xi(t)\leqslant M[z(t),\ F[t,\ x(t)]-F[t,\ y(t)]].$$

Если справедливо неравенство

$$M[x-y,\ F(t,\ x)-F(t,\ y)]\leqslant L[t,\ \varphi(x-y)], \tag{9.4}$$

то

$$D^*\xi(t)\leqslant L[t,\ \xi],$$

и можно непосредственно применять лемму 9.1, что в конечном итоге приводит к следующему результату.

Теорема 9.1. *Пусть справедливо* (9.4) *и* $\alpha(t)\equiv 0$ — *единственное решение задачи* (9.3). *Тогда решения* (9.2) *определяются по начальному условию единственным образом.* ▲

Для практического применения теоремы 9.1 надо конкретно указать функции $\varphi$, $L$, $M$. Рассмотрим несколько частных случаев. Часто удается обойтись функцией $L(\alpha)$, не зависящей от $t$. При этом $\alpha(t)\equiv 0$ — единственное решение задачи

$$\dot\alpha=L(\alpha),\qquad \alpha(t_0)=0,$$

если $L(\alpha)$ удовлетворяет условию Осгуда: для сколь угодно малого положительного $\varepsilon$

$$\int_0^\varepsilon L^{-1}(\alpha)\,d\alpha=\infty.$$

Этому условию удовлетворяют, например, функции $l\alpha$, $l\alpha|\ln\alpha|$, ....

Положим теперь

$$\varphi(x)=\|x\|,\qquad M(x,\ h)=\|h\|,\quad L(\alpha)=l\alpha.$$

В этом случае условие (9.4) переходит в обычное условие Липшица

$$\|F(t,\ x)-F(t,\ y)\|\leqslant l\|x-y\|.$$

Одностороннее условие Липшица

$$(F(t,\ x)-F(t,\ y),\ x-y)\leqslant l(x-y)^2$$

получается из (9.4) подстановкой

$$\varphi(x)=x^2,\qquad M(x,\ h)=2(x,\ h),\qquad L(\alpha)=l\alpha.$$

Этих условий на практике, как правило, бывает достаточно. В отдельных конкретных случаях можно пытаться использовать теорему 9.1 более действенно.

## § 10. Нелокальная продолжимость решений

Предположим, правая часть дифференциального уравнения

$$\dot{x} = F(t, x) \tag{10.1}$$

непрерывна по совокупности переменных. Тогда через каждую точку $x(t_0) \in R^n$ проходит по крайней мере одно решение $x(t)$, определенное на некотором интервале $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$. Однако не всегда это решение можно продолжить на все значения $t$. Например, любое решение скалярного уравнения $\dot{\alpha} = 1 + \alpha^2$ не может быть продолжено на промежуток, длина которого больше $\pi$. В то же время в прикладных задачах довольно часто важно иметь решение $x(t)$, определенное для всех $t \geqslant t_0$. Далее мы укажем некоторые достаточные условия, обеспечивающие продолжимость решений на всю полуось $[t_0, \infty)$.

*Если решение* (10.1) $x(t)$ *определено на сегменте* $[t_0, t_1]$, *то его всегда можно продолжить на* $[t_0, t_1 + \varepsilon)$ (*при достаточно малом* $\varepsilon > 0$), *«склеивая»* $x(t)$ *с решением задачи*

$$\dot{y} = F(t, y), \qquad y(t_1) = x(t_1),$$

*которое заведомо определено для* $t \in [t_1, t_1 + \varepsilon)$, *если только* $\varepsilon > 0$ *достаточно мало.*

Таким способом решение $x(t)$ можно продолжать или до бесконечности, или до некоторого $t^* > t_0$. Если решение $x(t)$ непродолжимо за $t^*$, то полутраектория $x(t)$, $t \in [t_0, t^*)$ — неограниченная. Действительно, если предположить противное, то

$$\lim_{t \to t^*} x(t) = x^*,$$

и, полагая $x(t^*) = x^*$, мы получим решение, определенное на $[t_0, t^*]$. Отсюда легко усмотреть справедливость следующего простого, но полезного результата.

Теорема 10.1. *Если решение* (10.1), *начинающееся в некоторой ограниченной области* $X \subset R^n$, *заведомо не может выйти из* $X$, *то оно нелокально продолжимо, т. е. продолжимо на все* $t \geqslant t_0$. ▲

Более общий результат можно получить, используя технику, описанную в предыдущем параграфе. Сделаем сразу необходимое для дальнейшего уточнение. Лемма 9.1 остается справедливой, если задача

$$d\alpha/dt = L(t, \alpha), \qquad \alpha(t_0) = \alpha_0, \qquad t \in [t_0, t_1) \tag{10.2}$$

имеет много решений, надо лишь в оценке $\beta(t) \leqslant \alpha(t)$ под $\alpha(t)$ подразумевать верхнее решение.

Рассмотрим теперь скалярную задачу (10.2), каждое решение которой определено при всех $t \geqslant t_0$. Предположим, что решение (10.1) $x(t)$ не продолжимо за $t^* > t_0$. Тогда, как было показано выше,

$$\|\boldsymbol{x}(t_k)\| \to \infty \tag{10.3}$$

на некоторой последовательности $t_k \to t^*$. Сопоставим решению $x(t)$ функцию

$$\xi(t) = \varphi(\boldsymbol{x}(t)),$$

где $\varphi(\boldsymbol{x})$ имеет полудифференциал $M(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{h})$ и удовлетворяет условию

$$\lim_{\|\boldsymbol{x}\| \to \infty} \varphi(\boldsymbol{x}) = \infty. \tag{10.4}$$

Пусть выполняется неравенство

$$M[\boldsymbol{x}, F(t, \boldsymbol{x})] \leqslant L[t, \varphi(\boldsymbol{x})]. \tag{10.5}$$

Тогда

$$D^* \xi(t) \leqslant M[\boldsymbol{x}, F(t, \boldsymbol{x})] \leqslant L[t, \varphi(\boldsymbol{x})],$$

и по лемме 9.1

$$\xi(t) \leqslant \alpha(t), \qquad t \in [t_0, t^*). \tag{10.6}$$

Из (10.3) и (10.4) следует $\xi(t_k) \to \infty$, но это в совокупности с (10.6) противоречит продолжимости любого решения (10.2) на полуось $t \geqslant t_0$.

Таким образом, справедлив следующий результат.

Теорема 10.2. *Пусть выполняется неравенство* (10.5), *функция* $\varphi(\boldsymbol{x})$ *удовлетворяет условию* (10.4) *и любое решение задачи* (10.2) *определено при всех* $t \geqslant t_0$; *тогда любое решение* (10.1) *нелокально продолжимо.* ▲

Кстати, любое решение (10.2) определено при всех $t \geqslant t_0$, если для сколь угодно большого $a > 0$

$$\int_a^\infty L^{-1}(\alpha)\, d\alpha = \infty.$$

## § 11. Уравнения в контингенциях

В этом параграфе мы остановимся на описании так называемых уравнений в контингенциях, которые будем записывать в виде

$$\dot{\boldsymbol{x}} \in F(\boldsymbol{x}), \tag{11.1}$$

где $F(\boldsymbol{x})$ — точечно-множественное (многозначное) отображение*. Связь этих уравнений с теорией АДС мы обсудим в конце параграфа, а пока займемся изложением некоторых фактов.

Оговорим сначала ряд предположений. Везде далее считается, что многозначное отображение $F$ каждой точке $x \in X$ сопоставляет выпуклое множество $F(x) \subset X$. Кроме того, предполагается, что отображение $F$ ограничено (образ каждого ограниченного множества ограничен) и непрерывно, т. е. полунепрерывно сверху и снизу, или же (что здесь равносильно) непрерывно по Хаусдорфу (см. Дополнение II).

Уточним теперь, что понимается под записью (11.1) и что же собственно, является решением уравнения в контингенциях. *Контингенцией* kont $x(t_0)$ *кривой* $x(t)$ в точке $t=t_0$ называется множество всех предельных направлений хорды, соединяющей точки $x(t_0)$ и $x(t_1)$ при условии, что $t_1 \mapsto t_0$. Другими словами, контингенцией kont $x(t_0)$ называется множество всех частичных пределов

$$\lim_{\tau_k \to 0} \frac{x(t_0+\tau_k)-x(t_0)}{\tau_k}.$$

Решением (11.1), проходящим в момент $t_0$ через точку $x_0$ и определенным на некотором интервале $(t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon)$, называется любая непрерывная функция $x(t)$, для которой

$$\operatorname{kont} x(t) \subset F[x(t)], \qquad t \in (t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon). \tag{11.2}$$

Таким образом, запись (11.2) более точно отражает смысл понятия уравнения в контингенциях, но мы далее все же отдаем предпочтение условной записи (11.1), которая более удобна.

Теорема 11.1. *В указанных предположениях через любую точку* $(t_0, x_0)$ *проходит хотя бы одно решение* (11.1) $x(t)$, *определенное на некотором интервале* $(t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon)$. ▲

Рассмотрим вопрос о нелокальной продолжимости решений (11.1).

Теорема 11.2. *Если решение* (11.1), *начинающееся в некоторой ограниченной области* $X \subset R^n$, *заведомо не может покинуть* $X$, *то оно продолжимо на все* $t \geqslant t_0$.

Доказательство этого факта практически полностью совпадает с доказательством теоремы 10.1. ▲

Нетрудно понять, что для уравнения в контингенциях может быть установлен также аналог теоремы 10.2, но этот результат в дальнейшем нам не понадобится, и мы не будем задерживать внимания на его формулировке.

Поясним, наконец, каким образом уравнения в контингенциях будут использоваться далее. Непрерывный вариант изучаемой нами модели коллективного поведения связан с рассмотрением семейств дифференциальных уравнений типа

$$\dot{x} = \Gamma(t)\, G(x), \quad 0 < \varepsilon_i \leqslant \gamma_i(t) \leqslant M_i, \tag{11.3}$$

* Свойства многозначных отображений описаны в Дополнении II.

где на функции $\gamma_i(t)$ можно накладывать различные ограничения (кусочная непрерывность, суммируемость). Запись (11.3) — лишь один из возможных вариантов формального отражения содержательной стороны задачи, которая здесь состоит в том, что каждый элемент системы движется в «нужную» сторону (см. главу I). Последнее свойство можно формально записать и так:

$$\dot{x} \in G_{\varepsilon M}(x), \tag{11.4}$$

где $G_{\varepsilon M}$ — точечно-множественное отображение, сопоставляющее точке $x$ множество

$$[\varepsilon_1 g_1(x), M_1 g_1(x)] \times \ldots \times [\varepsilon_n g_n(x), M_n g_n(x)].$$

Не останавливаясь на взаимосвязи между формализациями (11.3) и (11.4), отметим лишь тот очевидный факт, что множество операторов сдвига по траекториям (11.4) удовлетворяет полугрупповому свойству (см. § 5), что позволяет рассматривать его как АДС.

Глава седьмая

# ГЛОБАЛЬНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ГЕТЕРОТОННЫХ СИСТЕМ

В классической теории устойчивости общий подход к исследованию нелинейных систем выглядит примерно так: «Пусть существует функционал, убывающий вдоль любой траектории, и справедливы некоторые дополнительные условия, тогда «все в порядке». Такой подход действительно весьма общий, но его успехи (в смысле разнообразия решаемых задач) довольно скромны, так как на практике обычно выясняется, что основная тяжесть вопроса заключена именно в поиске подходящего функционала.

При изучении АДС мы имеем дело с более общей ситуацией (по сравнению с той, которая характерна для классической теории устойчивости). Идею упомянутого выше метода исследования здесь можно сохранить, но при этом также трудно рассчитывать на практическую эффективность. Поэтому мы отдаем предпочтение выделению классов устойчивых систем на основе легко проверяемых условий. По счастливому стечению обстоятельств класс тех систем, с которыми нам удается удовлетворительно работать, близок к классу тех систем, которые (по нашему мнению) представляют практический интерес. Отметим, наконец, что основные результаты этой главы развиваются на идеях, отличных от идеи второго метода Ляпунова, благодаря чему теоремы 3.2, 6.2 (глава VI) приобретают реальное практическое звучание.

## § 1. Гомогенные системы

Мы начнем изучение динамических свойств гетеротонных систем с наиболее простого случая, когда оператор межэлементных связей $F(x)$ — монотонный (предполагается, что полуупорядоченность введена неотрицательным ортантом $R^n_+$). Систему в этом случае будем называть положительно гомогенной.

Приведем несколько примеров положительно гомогенных систем. Обратимся для этого к примерам § 2 главы I. Рыночная модель (пример 4) будет положительно гомогенной системой в случае валовой заменимости товаров, модель массового обслуживания (пример 6) — в случае, когда каждая группа $K_j$ состоит из единственного элемента. В игровой интерпретации, когда стратегия $x_i$ элемента (игрока) $A_i$ имеет характер усилия и оператор межэлементных связей

$$F(x)=\{f_1(x), \ \ldots, \ f_n(x)\}$$

определяется из условия

$$\forall i: D_i(x_1, \ \ldots, \ x_{i-1}, f_i(x), x_{i+1}, \ \ldots, \ x_n)=\max_{x_i} D_i(x),$$

где $D_i$ — функция выигрыша $A_i$, положительная гомогенность означает, что каждому игроку для поддержания оптимума своего выигрыша приходится отвечать увеличением собственного усилия на увеличение усилий остальных игроков. С интуитивной точки зрения такое положение вещей представляется вполне естественным. (Нетрудно показать, что игровая модель примера 2 представляет собой положительно гомогенную систему) *.

Достаточно распространены также отрицательно гомогенные системы, оператор межэлементных связей которых антимонотонен. Рыночная модель (пример 4, глава I) — отрицательно гомогенная система в случае валовой дополнительности товаров, модель сосуществования биологических видов (пример 5) — в случае отсутствия в системе отношений типа «хищник — жертва», наконец, модель массового обслуживания (пример 6) — в случае, когда имеется лишь одна группа $K_1$.

*Динамика положительно гомогенных систем.* Пусть положительно гомогенная система функционирует в дискретном времени, т. е.

$$x^{k+1}=x^k+\Gamma_k(F(x^k)-x^k), \tag{1.1}$$

где $\Gamma_k=\mathrm{diag}(\gamma_1^k, \ \ldots, \ \gamma_n^k)$, $\gamma_i^k \in [0, \ 1]$.

Будем рассматривать пока лишь невырожденные траектории (1.1), которые характеризуются тем, что $\forall i: \sum\limits_k^{\infty} \gamma_i^k=\infty$. Предположим также, что переменные $x_i$ могут изменяться в пределах сегментов $[v_i^0, \ w_i^0]$, и при любом допустимом состоянии системы текущие положения цели $f_i(x)$ также заключены в этих пределах, т. е. конусный отрезок

$$\langle v^0, w^0\rangle=\{x \mid v^0 \leqslant x \leqslant w^0\}$$

инвариантен для оператора $F(x)$

$$F(\langle v^0, w^0\rangle) \subset \langle v^0, w^0\rangle. \tag{1.2}$$

Теорема 1.1. *Пусть оператор $F$ положительно гомогенной системы непрерывен и имеет на $\langle v^0, w^0\rangle$ единственную неподвижную точку $x^*$; тогда любая невырожденная траектория* (1.1) *сходится к $x^*$ независимо от начального положения $x^0 \in \langle v^0, w^0\rangle$.*

---

* Специальный класс игровых моделей рассматривается в главе X.

Доказательство. Рассмотрим любую невырожденную траекторию $v^k$, порождаемую процедурой (1.1), начинающейся в точке $v^0$. Покажем, что последовательность $v^k$ монотонно возрастает, т. е.

$$v^0 \leqslant v^1 \leqslant \ldots \leqslant v^k \leqslant \ldots$$

В силу (1.2) $F(v^0) \geqslant v^0$, поэтому

$$v^1 - v^0 = \Gamma_0(-v^0 + F(v^0)) \geqslant 0.$$

Кроме того,

$$-v^1 + F(v^1) \geqslant -v^1 + F(v^0) = (E - \Gamma_0)(-v^0 + F(v^0)) \geqslant 0,$$

откуда $v^2 - v^1 = \Gamma_1(-v^1 + F(v^1)) \geqslant 0$ и т. д.

Монотонно возрастающая последовательность $v^k$ ограничена (так как $\forall k: v^k \in \langle v^0, w^0 \rangle$), поэтому $v^k \to v^*$. В силу невырожденности траектории и непрерывности $F$, $v^*$ с необходимостью является неподвижной точкой оператора $F$ (теорема 1.1 в главе VI). Следовательно, $v^* = x^*$.

Совершенно аналогично можно показать, что невырожденная траектория $w^k$ (1.1), начинающаяся в точке $w^0$, монотонно убывает, что в конечном итоге дает $w^k \to w^*$ и $w^* = x^*$.

Рассмотрим теперь произвольную невырожденную траекторию (1.1) $x^k$, начинающуюся в некоторой точке $x^0 \in \langle v^0, w^0 \rangle$. Заметим, что каждой траектории $x^k$ отвечает вполне определенная последовательность $\Gamma_k$. Пусть эта же последовательность $\Gamma_k$ отвечает траекториям $v^k$ и $w^k$, тогда

$$\forall k: v^k \leqslant x^k \leqslant w^k. \tag{1.3}$$

Это неравенство легко доказывается по индукции. Крайние последовательности в (1.3) сходятся к одному и тому же пределу $x^*$. Отсюда $x^k \to x^*$. ▲

Рассмотренные выше последовательности $v^k$, $w^k$ дают возможность указать последовательность вложенных конусных отрезков

$$\langle v^k, w^k \rangle \to \{x^*\},$$

каждый из которых инвариантен для оператора $F$, и поэтому любая траектория (1.1), начинающаяся в $\langle v^k, w^k \rangle$, не может выйти за пределы $\langle v^k, w^k \rangle$. По этой причине положение равновесия системы (АДС) в условиях теоремы 1.1 устойчиво.

Заметим, что сходимость невырожденных траекторий вовсе не влечет за собой условие сходимости АДС А2. Как отмечалось в главе VI, среди невырожденных траекторий существуют сколь угодно медленно сходящиеся. В предположениях теоремы 1.1 условие сходимости АДС обеспечивает дополнительное ограничение

$$\forall i, k: 0 < \varepsilon_i \leqslant \gamma_i^k \leqslant 1. \tag{1.4}$$

В этом случае легко показать, что для любой траектории (1.1) имеет место

$$x^k \in \langle v_\varepsilon^k, w_\varepsilon^k \rangle \to \{x^*\}, \tag{1.5}$$

где последовательности $v_\varepsilon^k$, $w_\varepsilon^k$ также порождаются процедурой (1.1) при условии, что

$$\forall k: \Gamma_k = \operatorname{diag}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$$

и $v_\varepsilon^0 = v^0$, $w_\varepsilon^0 = w^0$. Условие (1.5) означает также, что в данном случае имеет место равномерная сходимость АДС. Впрочем, вывод о равномерной сходимости здесь можно сделать и сразу на основании теоремы 2.2 (глава VI).

До сих пор речь шла о системах, траектории состояний которых заведомо находятся в ограниченном множестве $\langle v^0, w^0 \rangle$. Приведенные результаты, однако, могут применяться и в том случае, когда пределы изменения переменных неограниченны. Для этого надо лишь дополнительно установить существование «сколь угодно большого» инвариантного конусного отрезка и проверить, что на каждом таком конусном отрезке выполняются, например, предположения теоремы 1.1.

В практических задачах областью изменения переменных часто служит неотрицательный ортант $R_+^n$. Если при этом оператор межэлементных связей $F(x)$ положительно гомогенной системы вогнут, т. е. выполняется неравенство

$$\forall i: f_i(\tau x) > \tau f_i(x), \quad x \in \operatorname{int} R_+^n, \quad \tau \in (0, 1),$$

и имеет на $\operatorname{int} R_+^n$ неподвижную точку $x^*$, то любая невырожденная траектория (1.1) будет сходиться к $x^*$ независимо от начального положения $x^0 \in \operatorname{int} R_+^n$. Доказательство этого факта моментально получается объединением утверждений теорем 4.1 и 4.4 главы III и теоремы 1.1.

*Системы с непрерывным временем.* Для изучения систем с непрерывным временем нам потребуется следующий вспомогательный результат.

Лемма 1.1. *Пусть правые части системы дифференциальных уравнений*

$$\dot{x}_i = h_i(t, x), \quad i = 1, \ldots, n \tag{1.6}$$

*обладают свойством диагональной положительности:*

$$h_i(t, x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n) \geqslant 0,$$

$$x_j \geqslant 0, j = 1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n$$

*и каждому начальному значению* $x(0)=x^0 \in R_+^n$ *соответствует единственное решение* $x(t)$; *тогда решение* $x(t)$ *неотрицательно, т. е. целиком лежит в* $R_+^n$.

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную систему

$$\dot{x}_i = h_i(t, x) + \varepsilon, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{1.7}$$

где $\varepsilon > 0$. Траектории (1.7) при условии $x(0) \in R_+^n$ заведомо неотрицательны и при $\varepsilon \to 0$ переходят в траектории (1.6). Окончательный вывод следует из замкнутости $R_+^n$. ▲

Обратимся теперь к рассмотрению положительно гомогенной системы, функционирующей в непрерывном времени, т. е.

$$\dot{x} = \Gamma(t)(F(x) - x), \tag{1.8}$$

где $\Gamma(t) = \mathrm{diag}(\gamma_1(t), \ldots, \gamma_n(t))$, $\gamma_i(t) \geqslant 0$.

Будем рассматривать пока невырожденные $\left(\forall\, i : \int\limits_0^\infty \gamma_i(t)\, dt = \infty\right)$ траектории (1.8) на некотором инвариантном для $F$ конусном отрезке $\langle v^0, w^0 \rangle$. Предположим также, что функции $\gamma_i(t)$ непрерывны и ограниченны.

Теорема 1.2. *Пусть оператор* $F$ *положительно гомогенной системы дважды непрерывно дифференцируем и имеет на* $\langle v^0, w^0 \rangle$ *единственную неподвижную точку* $x^*$; *тогда любая невырожденная траектория сходится к* $x^*$ *независимо от начального положения* $x(0) \in \langle v^0, w^0 \rangle$.

Доказательство. При любой конкретной функции $\Gamma(t)$ через любую наперед заданную точку $x(0) \in \langle v^0, w^0 \rangle$ проходит единственная нелокально продолжимая траектория (1.8) $x(t)$. Единственность вытекает из липшицевости * правой части (1.8) (последнее справедливо в силу ограниченности функций $\gamma_i(t)$, непрерывной дифференцируемости $F(x)$ и компактности $\langle v^0, w^0 \rangle$), а нелокальная продолжимость—непосредственное следствие теоремы 10.1 главы VI. Таким образом, для любой конкретной функции $\Gamma(t)$ и любого $t \geqslant 0$ определен оператор сдвига $U_t$ по траекториям (1.8):

$$x(t) = U_t x(0).$$

Докажем монотонность оператора $U_t$, т. е.

$$\alpha(0) \geqslant \beta(0) \Rightarrow U_t \alpha(0) \geqslant U_t \beta(0).$$

Введем обозначение

$$\xi(t) = U_t \alpha(0) - U_t \beta(0) = \alpha(t) - \beta(t).$$

---

* См. § 9 главы VI.

Очевидно, $\xi(t)$ удовлетворяет системе дифференциальных уравнений

$$\forall i: \dot{\xi}_i = \gamma_i(t)\,[f_i(\xi+\beta) - (\xi_i+\beta_i) - f_i(\beta) + \beta_i],$$

т. е.

$$\forall i: \dot{\xi}_i = \gamma_i(t)\,[f_i(\xi+\beta) - f_i(\beta) - \xi_i]. \qquad (1.9)$$

Легко видеть, что система (1.9) удовлетворяет условиям леммы 1.1, поэтому $\xi(t) \in R^n_+$, что означает монотонность $U_t$.

Рассмотрим теперь решения (1.8) $\boldsymbol{v}(t)$, $\boldsymbol{w}(t)$ с начальными значениями

$$\boldsymbol{v}(0) = \boldsymbol{v}^0, \qquad \boldsymbol{w}(0) = \boldsymbol{w}^0.$$

В силу (1.8) переменные $y_i = f_i(\boldsymbol{x}) - x_i$ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\forall i: \dot{y}_i = -\gamma_i(t)\,y_i + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}\gamma_j(t)\,y_j. \qquad (1.10)$$

Применяя к (1.10) лемму 1.1, получаем

$$\boldsymbol{y}(0) = F(\boldsymbol{v}^0) - \boldsymbol{v}^0 \geqslant 0 \Rightarrow \boldsymbol{y}(t) \geqslant 0,$$

откуда

$$\frac{d\boldsymbol{v}(t)}{dt} = \Gamma(t)\,\boldsymbol{y}(t) \geqslant 0.$$

Следовательно, $\boldsymbol{v}(t)$ монотонно возрастает по $t$. Аналогично доказывается монотонность убывания $\boldsymbol{w}(t)$. Из монотонности и ограниченности функций $\boldsymbol{v}(t)$, $\boldsymbol{w}(t)$ вытекает

$$\boldsymbol{v}(t) \to \boldsymbol{v}^*, \ \boldsymbol{w}(t) \to \boldsymbol{w}^* \text{ при } t \to \infty.$$

Из единственности неподвижной точки у оператора $F$, непрерывности $F$ и невырожденности траекторий $\boldsymbol{v}(t)$, $\boldsymbol{w}(t)$ следует

$$\boldsymbol{v}^* = \boldsymbol{w}^* = \boldsymbol{x}^*.$$

Наконец, в силу монотонности $U_t$ и $\boldsymbol{v}^0 \leqslant \boldsymbol{x}(0) \leqslant \boldsymbol{w}^0$ имеем

$$\boldsymbol{v}(t) \leqslant \boldsymbol{x}(t) \leqslant \boldsymbol{w}(t). \qquad (1.11)$$

Крайние последовательности в (1.11) сходятся к одному и тому же пределу $\boldsymbol{x}^*$. Отсюда $\boldsymbol{x}(t) \to \boldsymbol{x}^*$. ▲

Нужно отметить, что требование дважды непрерывной дифференцируемости $F(\boldsymbol{x})$ использовалось в доказательстве лишь для обеспечения единственности решений (1.10) и может быть опущено, если эта единственность вытекает из других соображений. Предположение же о непрерывной дифференцируемости $F(\boldsymbol{x})$ здесь существенно связано со способом доказательства, но и от него можно отказаться, если использовать более громоздкую технику.

При рассмотрении функционирования модели в дискретном времени было установлено существование последовательности инвариантных конусных отрезков $\langle v^k, w^k\rangle \to \{x^*\}$. Ясно, что этот факт обеспечивает устойчивость положения равновесия $x^*$ и в случае непрерывного времени.

Для неограниченных областей изменения переменных здесь можно сделать те же замечания, что и в дискретном случае. В частности, если оператор $F$ вогнут и имеет на $\operatorname{int} R_+^n$ неподвижную точку $x^*$, то любая невырожденная траектория (1.8) сходится к $x^*$ независимо от начального положения $x(0) \in \operatorname{int} R_+^n$.

При переходе от изучения невырожденных траекторий (1.8) к траекториям дифференциального уравнения в контингенциях *

$$\dot{x} \in (F(x) - x)_{\varepsilon M} \qquad (1.12)$$

мы приходим к изучению АДС. [Тот факт, что множество операторов сдвига по траекториям (1.2) представляет собой АДС, уже отмечался в главе VI.]

Вопросы существования и нелокальной продолжимости в данном случае исчерпываются теоремами 11.1 и 11.2 главы VI. Сходимость и устойчивость можно изучать на основе теорем предыдущей главы (о существовании метрик) и того факта, что АДС с дискретным временем (и тем же оператором $F$) удовлетворяет условиям А1—А3. Дело в том, что если АДС с дискретным временем $\rho$-сжимающий, то АДС с непрерывным временем будет также $\rho$-сжимающим. Это можно легко понять, если учесть, что контингенция любой траектории (1.12) состоит из векторов, каждый из которых совпадает по направлению с одним из векторов $\Delta x^k = x^{k+1} - x^k$ дискретного ансамбля.

*Об отрицательно гомогенных системах.* Примеры отрицательно гомогенных систем приведены в начале параграфа. Их исследование в значительной части аналогично исследованию положительно гомогенных систем. Все приведенные выше результаты сохраняют силу в дополнительном предположении, что единственную неподвижную точку имеет не только оператор $F$, но и $F^2$ (для антивогнутых операторов это выполняется автоматически). В доказательствах, однако, здесь приходится рассматривать вспомогательный итерационный процесс

$$v^{k+1} = v^k + \Gamma_k (F(w^k) - v^k); \qquad w^{k+1} = w^k + \Gamma_k (F(v^k) - w^k),$$

а также некоторый вспомогательный процесс при исследовании варианта модели с непрерывным временем. Подробности легко можно извлечь из рассмотрения общего случая в следующих двух параграфах.

---

* Здесь $(F(x) - x)_{\varepsilon M}$ — точечно-множественное отображение типа (VI.11.4), т. е. $(F(x) - x)_{\varepsilon M}$ сопоставляет точке $x$ множество

$$[\varepsilon_1 (f_1(x) - x_1), M_1 (f_1(x) - x_1)] \times \ldots \times [\varepsilon_n (f_n(x) - x_n), M_n (f_n(x) - x_n)].$$

## § 2. Динамика гетеротонных систем с дискретным временем

В этом параграфе мы продолжаем изучение процедуры (1.1), но уже для случая гетеротонного оператора $F$ общего вида. Чтобы технические детали не заслонили основных мотивов дальнейшего изложения, кратко остановимся на идейной стороне последующих доказательств.

Для положительно гомогенных систем (т. е. в случае монотонного оператора $F$) нам удалось (§ 1) сопоставить каждой невырожденной траектории (1.1) две последовательности $v^k$ и $w^k$, которые монотонно сходились и зажимали $x^k$, т. е. $v^k \leqslant x^k \leqslant w^k$. Эта же идея может быть сохранена и в общем случае, но если прежде последовательности $v^k$, $w^k$ порождались той же самой процедурой (1.1), то теперь процедура (1.1) для этой цели не годится. Теперь соответствующие последовательности $v^k$, $w^k$ мы будем «генерировать» с помощью вспомогательной процедуры *

$$\begin{aligned} v^{k+1} &= v^k + \Gamma_k [\hat{F}(v^k, w^k) - v^k]; \\ w^{k+1} &= w^k + \Gamma_k [\hat{F}(w^k, v^k) - w^k], \end{aligned} \tag{2.1}$$

исходящей из $(v^0, w^0)$, где $v^0 \leqslant w^0$. В случае положительно гомогенной системы монотонность последовательностей вытекала из инвариантности (для $F$) конусного отрезка $\langle v^0, w^0 \rangle$. Здесь потребуется более сильное предположение: сильная инвариантность $\langle v^0, w^0 \rangle$, т. е. справедливость неравенств

$$\hat{F}(v_0, w^0) \geqslant v^0, \quad \hat{F}(w^0, v^0) \leqslant w^0. \tag{2.2}$$

Представим теперь, что сходимость $v^k \to v^*$, $w^k \to w^*$, а также условие $x^k \in \langle v^k, w^k \rangle$ уже доказаны. В очевидных предположениях пара $(v^*, w^*)$ — решение системы уравнений

$$\hat{F}(v, w) = v; \qquad \hat{F}(w, v) = w. \tag{2.3}$$

Ясно, что требование единственности решения (2.3) будет играть ту же роль, что и требование единственности неподвижной точки у монотонного оператора $F$ в § 1.

Таким образом, в отличие от случая монотонного оператора $F$ здесь происходит «ужесточение» требований в двух пунктах: инвариантность заменяется сильной инвариантностью, а единственность равновесия — единственностью решения системы (2.3). Однако эти «потери» не являются следствием недостатков метода, а связаны с существом задачи. Для весьма широкого класса гетерогенных операторов (а значит, и для монотонных,

---

* Напомним (см. главу III, § 3), что $\hat{F}$ обозначает сопутствующий оператор.

и для антимонотонных) сильная инвариантность равносильна обычной (глава III, § 3), поэтому требование обычной инвариантности конусного отрезка работоспособно не только для монотонных операторов, но и для операторов существенно более общего вида. Этого нельзя сказать о требовании единственности равновесия системы. Только для монотонного оператора $F$ единственность решения (2.3) равносильна единственности равновесия системы (единственности неподвижной точки оператора $F$), а уже для антимонотонного оператора $F$ она переходит в требование единственности неподвижной точки у $F^2$. По этой причине обсуждению достаточных условий, обеспечивающих единственность решения (2.3), будет уделено особое внимание.

*Сходимость невырожденных траекторий.* Оператор $\hat{F}$ (а значит, и $F$) далее предполагается непрерывным, и это не всегда оговаривается.

Теорема 2.1. *Пусть оператор $F$ гетеротонной системы имеет сильно инвариантный конусный отрезок $\langle v^0, w^0\rangle$, на котором система уравнений* (2.3) *не может иметь более одного решения $v$, $w \in \langle v^0, w^0\rangle$. Тогда у системы существует положение равновесия $x^* \in \langle v^0, w^0\rangle$, и любая невырожденная траектория* (1.1) *сходится к $x^*$ независимо от начального положения $x^0 \in \langle v^0, w^0\rangle$.*

Доказательство. Заметим сразу, что существование положения равновесия $x^* \in \langle v^0, w^0\rangle$ вытекает из теоремы 3.2 главы III. Возьмем любую невырожденную траекторию (1.1) $x^k$ и сопоставим ей траекторию процедуры (2.1) с той же самой последовательностью $\Gamma_k$. [Подразумевается, что траектория (2.1) исходит из $(v^0, w^0)$, где $v^0$ и $w^0$ служат точными границами конусного отрезка $\langle v^0, w^0\rangle$, т. е. совпадение обозначений не случайно.]

Очевидно [см. (2.2)],

$$v^1 - v^0 = \Gamma_0[\hat{F}(v^0, w^0) - v^0] \geqslant 0.$$

Аналогично $w^1 - w^0 \leqslant 0$. Наконец *,

$$w^1 - v^1 = (E - \Gamma_0)(w^0 - v^0) + \Gamma_0[\hat{F}(w^0, v^0) - \hat{F}(v^0, w^0)] \geqslant 0.$$

Таким образом, $v^0 \leqslant v^1 \leqslant w^1 \leqslant w^0$. При этом конусный отрезок $\langle v^1, w^1\rangle$ снова сильно инвариантен. Действительно,

$$\begin{aligned}
&\hat{F}(v^1, w^1) - v^1 \geqslant \hat{F}(v^0, w^0) - v^0 - \Gamma_0[\hat{F}(v^0, w^0) - v^0] = \\
&\quad = (E - \Gamma_0)[\hat{F}(v^0, w^0) - v^0] \geqslant 0; \\
&w^1 - \hat{F}(w^1, v^1) \geqslant w^0 + \Gamma_0[\hat{F}(w^0, v^0) - w^0] - \hat{F}(w^0, v^0) = \\
&\quad = (E - \Gamma_0)[w^0 - \hat{F}(w^0, v^0)] \geqslant 0.
\end{aligned}$$

Это позволяет индуктивно продолжить процесс доказатель-

---

* Следует учесть, что $w^0 \geqslant v^0$ и $\hat{F}(v, w)$ монотонно возрастает по первому аргументу и убывает по второму (см. главу III, § 3).

ства и получить цепочку неравенств

$$v^0 \leqslant \ldots \leqslant v^k \leqslant \ldots \leqslant w^k \leqslant \ldots \leqslant w^0.$$

Отсюда следует $v^k \to v^*$, $w^k \to w^*$ (причем $v^* \leqslant w^*$). Поскольку оператор $\hat{F}$ непрерывен и рассматривается невырожденная траектория, пара $(v^*, w^*)$ с необходимостью является решением системы уравнений (2.3). Но система (2.3) имеет очевидное решение $v = w = x^*$ и других решений по предположению не имеет. Следовательно, $v^* = w^* = x^*$, т. е.

$$v^k \to x^*, \qquad w^k \to x^*. \tag{2.4}$$

Покажем теперь, что последовательности $v^k$, $w^k$ «зажимают» $x^k$ в смысле

$$v^k \leqslant x^k \leqslant w^k. \tag{2.5}$$

Применяя индукцию, получаем: $x^0 \in \langle v^0, w^0 \rangle$. Пусть $x^k \in \langle v^k, w^k \rangle$ для некоторого $k \geqslant 0$, тогда

$$\begin{aligned} v^{k+1} &= (E - \Gamma_k) v^k + \Gamma_k \hat{F}(v^k, w^k) \leqslant (E - \Gamma_k) x^k + \Gamma_k \hat{F}(x^k, x^k) = \\ &= x^{k+1} \leqslant (E - \Gamma_k) w^k + \Gamma_k \hat{F}(w^k, v^k) = w^{k+1}. \end{aligned}$$

Сравнивая теперь (2.4) и (2.5), приходим к выводу: $x^k \to x^*$. ▲

Пусть последовательности $y^k$, $z^k$ (так же как и $v^k$, $w^k$) порождаются процедурой типа (2.1), т. е.

$$y^{k+1} = y^k + \Gamma_k [\hat{F}(y^k, z^k) - y^k];$$

$$z^{k+1} = z^k + \Gamma_k [\hat{F}(z^k, y^k) - z^k].$$

Лемма 2.1. *Пусть* $y^0, z^0 \in \langle v^0, w^0 \rangle$; *тогда*

$$\forall k : y^k, z^k \in \langle v^k, w^k \rangle. \tag{2.6}$$

Доказательство. Для $k=0$ (2.6) справедливо. Пусть (2.6) справедливо для некоторого $k \geqslant 0$, тогда

$$\begin{aligned} v^{k+1} &= (E - \Gamma_k) v^k + \Gamma_k \hat{F}(v^k, w^k) \leqslant (E - \Gamma_k) y^k + \Gamma_k \hat{F}(y^k, z^k) = \\ &= y^{k+1} \leqslant (E - \Gamma_k) w^k + \Gamma_k \hat{F}(w^k, v^k) = w^{k+1}. \end{aligned}$$

Аналогично доказывается $\forall k : z^k \in \langle v^k, w^k \rangle$. ▲

Лемма 2.2. *Пусть решение системы уравнений* (2.3) *неединственно; тогда найдется такое решение* $(\tilde{v}^*, \tilde{w}^*)$, *причем* $\tilde{v}^* \leqslant \tilde{w}^*$, *что для любого другого* $(v^*, w^*)$ *будут справедливы включения*

$$v^*, w^* \in \langle \tilde{v}^*, \tilde{w}^* \rangle.$$

Для доказательства возьмем любую невырожденную траекторию (2.1) и обозначим пределы последовательностей $v^k$, $w^k$ соответственно через $\tilde{v}^*$, $\tilde{w}^*$. Пара $(\tilde{v}^*, \tilde{w}^*)$, причем $\tilde{v}^* \leqslant \tilde{w}^*$, —решение системы (2.3) (см. доказательство теоремы 2.1). Пусть $(v^*, w^*)$ —любое другое решение (2.3). Полагая $y^0 = v^*$, $z^0 = w^*$ и применяя лемму 2.1, получаем требуемое заключение. ▲ Интересно, что свойство сугубо статической природы здесь удобно доказывать на основе рассмотрения динамического процесса.

Теорема 2.2. *Любая невырожденная траектория* (1.1) *сходится к множеству* * $\langle \tilde{v}^*, \tilde{w}^* \rangle$.

При доказательстве леммы 2.2 мы установили $v^k \to \tilde{v}^*$, $w^k \to \tilde{w}^*$, причем

$$\forall k : \langle \tilde{v}^*, \tilde{w}^* \rangle \subset \langle v^k, w^k \rangle.$$

Учитывая теперь (2.5), получаем $x^k \to \langle \tilde{v}^*, \tilde{w}^* \rangle$. ▲

В частном случае $\forall k : \Gamma_k = E$ процедура (2.1) приобретает вид

$$v^{k+1} = \hat{F}(v^k, w^k), \quad w^{k+1} = \hat{F}(w^k, v^k). \tag{2.7}$$

Если на траектории (2.7)

$$v^k - w^k \to 0 \quad \text{при } k \to \infty,$$

то из теоремы 2.2 следует единственность решения системы (2.3), а значит, и сходимость любой другой невырожденной траектории к

$$x^* = \tilde{v}^* = \tilde{w}^*.$$

Таким образом, если система допускает проведение эксперимента или в распоряжении исследователя имеется модель, на которой можно реализовать процесс (2.7), то в ряде случаев (когда $v^k - w^k \to 0$) о сходимости любой невырожденной траектории (1.1) можно судить по наблюдению лишь одной реализации процесса (2.7). Конечно, процесс (2.7) практически невозможно довести «до конца». Его приходится останавливать на некотором конечном шаге $k_0$, тогда можно гарантировать сходимость любой невырожденной траектории (1.1) $x^k$ к $\langle v^{k_0}, w^{k_0} \rangle$. Такой вывод может быть вполне удовлетворительным, если множество $\langle v^{k_0}, w^{k_0} \rangle$ достаточно мало по размерам, что действительно имеет место при больших $k_0$ в случае $v^k - w^k \to 0$.

*Система уравнений (2.3) и псевдовогнутость.* Из доказательства теоремы 2.1 видно, что требование единственности решения (2.3) можно заменить более слабым требованием единственности полуупорядоченного решения (2.3) $(v, w)$ такого, что $v \leqslant w$.

---

* Под сходимостью $x^k$ к $\langle \tilde{v}^*, \tilde{w}^* \rangle$ понимается

$$\rho\,(x^k, \langle \tilde{v}^*, \tilde{w}^* \rangle) \to 0 \text{ при } k \to \infty,$$

где $\rho$ — евклидова (или другая эквивалентная) метрика.

На основании леммы 2.2 легко показать, что оба эти требования эквивалентны, но второе с точки зрения практической проверки более удобно. Достаточным условием единственности решения (2.3) будет, например, следующее *:

$$\hat{F}(v+u, w-u) \overline{\geqslant} \hat{F}(v, w)+u,$$

где

$$u \geqslant 0 \; (u \neq 0), \; v \leqslant w, \; v, \; w, \; v+u, \; w-u \in \langle v^0, w^0 \rangle.$$

Действительно, если предположить противное, т. е. что система (2.3) имеет несколько решений, то из леммы 2.2 вытекает существование решения (2.3) $(\tilde{v}^*, \tilde{w}^*)$ такого, что $\tilde{v}^* \leqslant \tilde{w}^*$ и $\tilde{v}^* \neq \tilde{w}^*$. Но тогда, с одной стороны,

$$\hat{F}\,[\tilde{v}^* + (\tilde{w}^* - \tilde{v}^*), \tilde{w}^* - (\tilde{w}^* - \tilde{v}^*)] = \hat{F}\,(\tilde{w}^*, \tilde{v}^*) = \tilde{w}^*,$$

с другой —

$$\hat{F}\,[\tilde{v}^* + (\tilde{w}^* - \tilde{v}^*), \tilde{w}^* - (\tilde{w}^* - \tilde{v}^*)] \overline{\geqslant} \hat{F}\,(\tilde{v}^*, \tilde{w}^*) + (\tilde{w}^* - \tilde{v}^*) = \tilde{w}^*.$$

Другой способ установлеиня единственности решения (2.3) может быть основан на следующем простом соображении. Можно пытаться найти функционал $\varphi(x, y)$ такой, что для любых $v \neq w$ (или для $v \leqslant w$, $v \neq w$)

$$\varphi\,[\hat{F}(v, w), \hat{F}(w, v)] \neq \varphi(v, w).$$

В частности, в качестве такого функционала можно выбрать норму разности и попытаться установить справедливость неравенства

$$\|\hat{F}(v, w) - \hat{F}(w, v)\| < \|v - w\|$$

для всех $v \neq w$.

Наконец, вопрос о единственности решения (2.3) не возникает, если оператор $F$ псевдовогнут.

Лемма 2.3. *Пусть оператор $F$ псевдовогнут; тогда система уравнений* (2.3) *не может иметь на* $\operatorname{int} R^n_+$ *более одного решения.*

Предположим противное. Тогда система (2.3) имеет решение $v, w \in \operatorname{int} R^n_+$, $v \neq w$. Используя метрику (глава III, 4.6) и псевдовогнутость $F$, получаем

$$v = \hat{F}(v, w) \geqslant \hat{F}\,(e^{-\rho(v,w)} w, e^{\rho(v,w)} v) > e^{-\rho(v,w)} \hat{F}(w, v) = e^{-\rho(v,w)} w;$$

$$w = \;\dots\; > e^{-\rho(v,w)} v,$$

что противоречит определению метрики $\rho$. ▲

Теорема 2.3. *Пусть псевдовогнутый оператор $F$ имеет неподвижную точку $x^* \in \operatorname{int} R^n_+$; тогда любая невырожденная траектория* (1.1) *сходится к $x^*$ независимо от начального положения $x^0 \in \operatorname{int} R^n_+$.*

---

* Содержательно это условие означает, что хотя бы одна компонента сопутствующего оператора растет не слишком быстро.

Из теоремы 4.1 главы III вытекает существование сильно инвариантного конусного отрезка $\langle v^0, w^0\rangle \subset \operatorname{int} R^n_+$, содержащего любую наперед заданную точку $x^0 \in \operatorname{int} R^n_+$. Единственность решения (2.3) гарантирует лемма 2.3. Далее остается сослаться на теорему 2.1. ▲

*Устойчивость и сходимость АДС.* Рассматривавшиеся выше последовательности $v^k$, $w^k$ таковы, что

$$\langle v^k, w^k\rangle \to \{x^*\},$$

и каждый конусный отрезок $\langle v^k, w^k\rangle$ сильно инвариантен для $F$. По этой причине положение равновесия системы в условиях теоремы 2.1, а также теоремы 2.3 устойчиво.

Пусть теперь рассматриваются только те траектории (1.1), на которых справедливо ограничение (1.4), т. е. $0<\varepsilon_i \leqslant \gamma_i^k \leqslant 1$. Покажем, что в этом случае имеет место равномерная сходимость АДС (А3), а значит, и обычная (А2).

Установим сначала следующий факт. Пусть траектории $(v^k, w^k)$ и $(\bar{v}^k, \bar{w}^k)$ порождаются процедурой (2.1) соответственно при последовательностях $\Gamma_k$ и $\bar{\Gamma}_k$. Пусть, кроме того,

$$\forall\, i, k : \gamma_i^k \geqslant \bar{\gamma}_i^k,$$

а также $v^0 = \bar{v}^0$, $w^0 = \bar{w}^0$ и конусный отрезок сильно инвариантен для $F$. Тогда

$$\forall\, k : \langle v^k, w^k\rangle \subset \langle \bar{v}^k, \bar{w}^k\rangle. \tag{2.8}$$

Для доказательства воспользуемся индукцией. Для $k=0$ (2.8) справедливо. Пусть (2.8) выполняется для некоторого $k \geqslant 0$, тогда

$$\begin{aligned} v^{k+1} - \bar{v}^{k+1} &= (v^k - \bar{v}^k) + \Gamma_k [\hat{F}(\bar{v}^k, w^k) - v^k] - \bar{\Gamma}_k [\hat{F}(\bar{v}^k, \bar{w}^k) - \bar{v}^k] \geqslant \\ &\geqslant \Gamma_k (v^k - \bar{v}^k) + \Gamma_k [\hat{F}(v^k, w^k) - v^k] - \Gamma_k [\hat{F}(\bar{v}^k, \bar{w}^k) - \bar{v}^k] = \\ &= \Gamma_k [\hat{F}(v^k, w^k) - \hat{F}(\bar{v}^k, \bar{w}^k)] \geqslant 0. \end{aligned}$$

Аналогично получается $w^{k+1} \leqslant \bar{w}^{k+1}$.

Итак, (2.8) доказано. Отсюда сразу следует, что траектория (2.1) $(v_\varepsilon^k, w_\varepsilon^k)$, соответствующая последовательности

$$\Gamma_k \equiv \operatorname{diag}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n),$$

сходится медленнее всех остальных, т. е. для любой другой $(v^k, w^k)$ справедливо

$$\forall\, k : \langle v^k, w^k\rangle \subset \langle v_\varepsilon^k, w_\varepsilon^k\rangle,$$

а значит, и $\forall\, k : x^k \in \langle v_\varepsilon^k, w_\varepsilon^k\rangle$. Это доказывает равномерную сходимость ансамбля [конечно, в предположении, что отрезок $\langle v^0, w^0\rangle$ сильно инвариантен и невырожденные траектории (2.1) действительно сходятся к $x^* \in \langle v^0, w^0\rangle$].

Сформулируем полученный результат в виде отдельной теоремы.

Теорема 2.4. *Пусть выполняются предположения теоремы* 2.1 (*или теоремы* 2.3); *тогда при ограничении* (1.4) *процедура* (1.1) *определяет* АДС *с единственным положением равновесия* $x^* \in \langle v^0, w^0 \rangle$ (*или* $x^* \in \operatorname{int} R^n_+$). *Это положение равновесия устойчиво* (А1). *Для* АДС *имеются также условия сходимости* (А2) *и равномерной сходимости* (А3). ▲

*О связи с гомогенными системами.* В § 1 мы не только приводили результаты, но и частично доказывали их, несмотря на то, что они являются частными случаями теорем настоящего параграфа. Этим мы лишь преследовали цель продемонстрировать на простом примере типичные технические приемы. Если бы гомогенные системы были исследованы нами более подробно, то в данном параграфе мы могли бы бо́льшую часть утверждений легко доказать, ссылаясь на гомогенный случай. Это можно было бы сделать следующим образом. Вспомним, что сопутствующий оператор $\hat{F}(v, w)$ монотонно возрастает по первому аргументу и монотонно убывает по второму. Введем в рассмотрение оператор $\tilde{F}: R^{2n} \to R^{2n}$, который паре $(v, w)$, т. е. точке $2n$-мерного пространства $R^{2n}$ сопоставляет пару

$$(\hat{F}(v, w), \hat{F}(w, v)) \in R^{2n}.$$

Легко видеть, что оператор $\tilde{F}$ будет монотонным, если $R^{2n}$ считать полуупорядоченным ортантом $R^{2n}_{+-}$, первые $n$ координат которого неотрицательны, а остальные — неположительны. Сильная инвариантность конусного отрезка $\langle v^0, w^0 \rangle$ для оператора $F$ в этом случае равносильна обычной инвариантности конусного отрезка

$$\langle (v^0, w^0), (w^0, v^0) \rangle \subset R^{2n}$$

для оператора $\tilde{F}$. Единственность решения системы уравнений (2.3) равносильна единственности неподвижной точки оператора $\tilde{F}$. Наконец, процедура (2.1) — это процедура типа (1.1) для оператора $\tilde{F}$, а траектории самой процедуры (1.1) для $F$ порождаются процедурой (2.1) в частном случае $v^0 = w^0 = x^0$; тогда $v^k = w^k = x^k$.

Таким образом, переходом к пространству удвоенного числа измерений можно свести изучение гетеротонных операторов (и их динамических свойств) к исследованию некоторого другого, уже монотонного оператора. Здесь нужно отметить, что аналогическая связь между псевдовогнутыми и вогнутыми операторами отсутствует.

## § 3. Гетеротонные системы с непрерывным временем

Сформулируем и докажем обобщение теоремы 1.2 (или же непрерывный аналог теоремы 2.1).

Теорема 3.1. *Пусть гетеротонный оператор* $F$ *дважды непрерывно дифференцируем и имеет сильно инвариантный конус-*

*ный отрезок* $\langle v^0, w^0\rangle$, *на котором система уравнений* (2.3) *не может иметь более одного решения. Тогда у системы существует положение равновесия* $x^*$ *и любая невырожденная траектория* (1.8) *сходится к* $x^*$ *независимо от начального положения* $x(0)\in \in\langle v^0, w^0\rangle$.

Доказательство. Существование положения равновесия $x^*\in\langle v^0, w^0\rangle$ вытекает из теоремы 3.2 главы III.

Сопоставим каждой невырожденной траектории (1.8) $x(t)$ две вектор-функции $v(t)$ и $w(t)$, которые удовлетворяют системе дифференциальных уравнений *

$$\begin{aligned}\dot v&=\Gamma(t)[\hat F(v, w)-v];\\ \dot w&=\Gamma(t)[\hat F(w, v)-w]\end{aligned}\tag{3.1}$$

и проходят через точку

$$v(0)=v^0,\qquad w(0)=w^0.$$

Положим

$$x(t)-v(t)=\alpha(t),\qquad w(t)-x(t)=\beta(t).$$

Очевидно,

$$\dot\alpha=\Gamma(t)[\hat F(v+\alpha, x)-(v+\alpha)-\hat F(v, x+\beta)+v];$$

$$\dot\beta=\Gamma(t)[\hat F(x+\beta, v)-(x+\beta)-\hat F(x, v+\alpha)+x].$$

Применяя к этой системе дифференциальных уравнений лемму 1.1 и учитывая $\alpha(0)\geqslant 0$ и $\beta(0)\geqslant 0$, получаем

$$\forall t\geqslant 0: v(t)\leqslant x(t)\leqslant w(t).$$

Введем далее обозначения

$$y_i=\hat f_i(v, w)-v_i;$$

$$z_i=w_i-\hat f_i(w, v).$$

В силу уравнений (3.1) вектор-функции $y(t)$, $z(t)$ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\forall i:\begin{cases}\dot y_i=-\gamma_i y_i+\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{\partial\hat f_i}{\partial v_j}\gamma_j y_j-\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{\partial\hat f_i}{\partial w_j}\gamma_j z_j;\\ \dot z_i=-\gamma_i z_i+\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{\partial\hat f_i}{\partial w_j}\gamma_j z_j-\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{\partial\hat f_i}{\partial v_j}\gamma_j y_j.\end{cases}$$

---

* Соответствие между $x(t)$ и $v(t)$, $w(t)$ определяется тем, что в обоих случаях фиксируется одна и та же функция $\Gamma(t)$.

Снова применяя к этой системе дифференциальных уравнений лемму 1.1, получаем

$$\dot{v}(t)=\Gamma(t)\,y(t)\geqslant 0, \qquad \dot{w}(t)=-\Gamma(t)\,z(t)\leqslant 0.$$

Следовательно, $v(t)$ монотонно возрастает, а $w(t)$ монотонно убывает. Присовокупляя сюда ограниченность $v(t)$ и $w(t)$, получаем $v(t)\to v^*$, $w(t)\to w^*$.

Из невырожденности траектории следует, что пара $(v^*, w^*)$ — решение системы уравнений (2.3). Но система (2.3) имеет очевидное решение $v=w=x^*$ и других решений по предположению не имеет. Поэтому $v^*=w^*=x^*$ и, наконец, $x(t)\to x^*$. ▲

Относительно требования дважды непрерывной дифференцируемости здесь можно сделать то же замечание, что и в § 1. По существу, для всех результатов § 2 можно указать соответствующие аналоги в случае непрерывного времени. Ограничимся формулировкой очевидного (в плане изложенного выше) результата.

Теорема 3.2. *Пусть дважды непрерывно дифференцируемый (на* $\operatorname{int} R^n_+$*) псевдовогнутый оператор* $F$ *имеет неподвижную точку* $x^*\in\operatorname{int} R^n_+$. *Тогда любая невырожденная траектория* (1.8) *сходится к* $x^*$ *независимо от начального положения* $x(0)\in\operatorname{int} R^n_+$. ▲

Вопросы устойчивости рассматриваются аналогично гомогенному случаю (см. § 1).

## § 4. Свойства оператора сдвига

В этом параграфе мы исследуем автономную динамическую систему (в обычном понимании этого слова), задаваемую некоторым дифференциальным уравнением

$$\dot{x}=G(x), \tag{4.1}$$

и попытаемся указать условия, при которых оператор сдвига по траекториям (4.1) гетеротонный. Затем на этой основе мы решим вопрос об устойчивости и асимптотической устойчивости равновесия (4.1). Эта задача имеет самостоятельное значение. Кроме того, из последующего изложения будет ясно, как исследовать некоторые классы ансамблей в том случае, когда их исходное описание имеет вид не (1.8), а более общий $\dot{x}=\Gamma(t)\,G(x)$.

Напомним, что гетеротонный оператор, по существу, определялся следующим образом. Оператор $F(x)$ мы называли гетеротонным, если он допускал запись

$$F(x)=\hat{F}(x, x),$$

причем оператор $\hat{F}$ монотонно возрастал по первому аргументу и монотонно убывал по второму.

От оператора

$$G(x)=\{g_1(x), \ldots, g_n(x)\},$$

стоящего в правой части (4.1), мы будем требовать своеобразную внедиагональную гетеротонность, считая, что все компоненты $g_i(x)$ допускают представление

$$g_i(x)=\hat{\hat{g}}_i(x, x),$$

где $\hat{\hat{g}}_i$ по всем координатам $x_j$ $(j \neq i)$ первого векторного аргумента $x$ возрастает, а по второму векторному аргументу (т. е. по всем его координатам $x_j$) убывает.

Далее, с помощью оператора $\hat{\hat{G}}(v, w)$, имеющего компоненты $\hat{\hat{g}}_i(v, w)$, можно записать систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{v} &= \hat{\hat{G}}(v, w); \\ \dot{w} &= \hat{\hat{G}}(w, v), \end{aligned} \tag{4.2}$$

которая по отношению к (4.1) играет ту же роль, что и (3.1) по отношению к процедуре (1.8).

В дальнейшем $U_t$ обозначает оператор сдвига по траекториям (4.1): $U_t x(0)=x(t)$; $\tilde{U}_t$—оператор сдвига по траекториям (4.2):

$$\tilde{U}_t(v(0), w(0))=(v(t), w(t)),$$

а $\hat{U}_t$—его «половина»:

$$\hat{U}_t(v(0), w(0))=v(t).$$

Предполагается, что каждому начальному значению соответствует единственное решение рассматриваемых систем дифференциальных уравнений. Оператор $\hat{\hat{G}}_n$ считается непрерывным по крайней мере на том подмножестве $R^n \times R^n$, на котором рассматривается движение (4.2).

Теорема 4.1. *Из внедиагональной гетеротонности $G$ вытекает гетеротонность оператора сдвига $U_t$. Сопутствующим для последнего будет $\hat{U}_t$.*

Доказательство. Пусть решения системы (4.2) $(v(t), w(t))$ и $(\bar{v}(t), \bar{w}(t))$ таковы, что $\bar{v}(0) \geqslant v(0)$, $\bar{w}(0) \leqslant w(0)$. Для вектор-функций

$$\alpha(t)=\bar{v}(t)-v(t), \qquad \beta(t)=w(t)-\bar{w}(t)$$

в силу (4.2) имеем

$$\dot{\alpha}=\hat{\hat{G}}(v+\alpha, w-\beta)-\hat{\hat{G}}(v, w);$$

$$\dot{\beta}=\hat{\hat{G}}(w, v)-\hat{\hat{G}}(w-\beta, v+\alpha).$$

Применяя к этой системе дифференциальных уравнений лемму 1.1, получаем

$$\forall t \geqslant 0 : \alpha(t) \geqslant 0, \quad \beta(t) \geqslant 0.$$

Таким образом, $\hat{U}_t(v, w)$ монотонно возрастает по первому аргументу и монотонно убывает по второму. Свойство $\hat{U}_t(x, x) = U_t x$ очевидно. ▲

Мы уже знаем, что гетеротонный оператор обладает полезными свойствами лишь в некоторых предположениях. Отметим с этой целью два очевидных результата.

Лемма 4.1. *Пусть выполняются неравенства*

$$\hat{\hat{G}}(v^0, w^0) \geqslant 0, \qquad \hat{\hat{G}}(w^0, v^0) \leqslant 0; \tag{4.3}$$

*тогда конусный отрезок* $\langle v^0, w^0 \rangle$ *сильно инвариантен для* $U_t$ (*при любом* $t \geqslant 0$). ▲

Лемма 4.2. *Единственность решения системы уравнений* (2.3) *для оператора* $\hat{U}_t$ *следует из единственности решения системы*

$$\hat{\hat{G}}(v, w) = 0, \qquad \hat{\hat{G}}(w, v) = 0. \blacktriangle \tag{4.4}$$

Легко видеть, что в случае, когда все $\hat{\hat{g}}_i(v, w)$ возрастают по $v_i$ (т. е. оператор $G$ гетеротонный, а $\hat{\hat{G}}$ — сопутствующий для него), никакой нетривиальный (невырождающийся в точку) конусный отрезок $\langle v^0, w^0 \rangle$ не может удовлетворять условиям (4.3). Этот факт необходимо учитывать при построении оператора $\hat{\hat{G}}$.

Поясним сказанное на простом примере. Пусть

$$G(x) = F(x) - x,$$

где $F(x)$ — гетеротонный оператор. Кстати, оператор $G$ в этом случае также гетеротонный с сопутствующим

$$\hat{G}(v, w) = \hat{F}(v, w) - w.$$

Понятно, что можно положить $\hat{\hat{G}}(v, w) = \hat{G}(v, w)$, но это будет плохо по указанной выше причине. Существенно лучше

$$\hat{\hat{G}}(v, w) = \hat{F}(v, w) - v.$$

Теорема 4.2. *В предположениях леммы* 4.1 *и* 4.2 *система дифференциальных уравнений* (4.1) *имеет единственное положение равновесия* $x^* \in \langle v^0, w^0 \rangle$, *которое асимптотически устойчиво на* $\langle v^0, w^0 \rangle$.

Доказательство. Существование и единственность $x^* \in \langle v^0, w^0 \rangle$ вытекают из теоремы 3.2 главы III и предположения леммы 4.2 о единственности решения (4.4).

Учитывая полугрупповое свойство оператора $U_t(U_tU_s=U_{t+s})$, а также утверждение теоремы 2.1, получаем

$$U_{ks}x \to x^*$$

при $k\to\infty$ и любом фиксированном $s>0$ ($x\in\langle v^0, w^0\rangle$), откуда $U_t x\to x^*$ при $t\to\infty$ и любом $x\in\langle v^0, w^0\rangle$.

Помимо сходимости всех траекторий к $x^*$ необходимо установить устойчивость $x^*$ по Ляпунову. Возьмем любое $s>0$ и рассмотрим итерационный процесс

$$v^{k+1}=\hat{U}_s(v^k, w^k), \qquad w^{k+1}=\hat{U}_s(w^k, v^k).$$

Очевидно (см. § 2) $\langle v^k, w^k\rangle\to\{x^*\}$, причем каждый конусный отрезок $\langle v^k, w^k\rangle$ сильно инвариантен для $U_t\,(t\geqslant 0)$.

Пусть теперь задана произвольная (открытая) окрестность $V$ точки $x^*$. Выберем $N$ из условия $\langle v^N, w^N\rangle\subset V$. Тогда траектория (4.1), начинающаяся в множестве $\langle v^N, w^N\rangle$, не выходит за пределы $V$. Выберем теперь некоторую окрестность $W\subset\langle v^N, w^N\rangle$ точки $x^*$. Из $x\in W$ следует $U_t x\in V$ при любом $t\geqslant 0$. ▲

Скажем, что оператор $G$ внедиагонально псевдовогнут, если для любых $\tau\in(0, 1)$, $v, w\in\operatorname{int}R^n_+$ выполняется неравенство

$$\hat{\hat{G}}\left(\tau v, \frac{1}{\tau}w\right)\geqslant\tau\hat{\hat{G}}(v, w).$$

Лемма 4.3. *Если оператор $G$ внедиагонально псевдовогнут, то оператор сдвига $U_t$ псевдовогнут.*

Нам необходимо установить справедливость неравенства

$$\hat{U}_t\left(\tau v, \frac{1}{\tau}w\right)\geqslant\tau U_t(v, w).$$

Дргуими словами, если $(v(t), w(t))$ — решение (4.2), проходящее через точку $(v, w)$, а $(\tilde{v}(t), \tilde{w}(t))$ — решение (4.2), проходящее через точку $\left(\tau v, \frac{1}{\tau}w\right)$, то

$$\tilde{v}(t)\geqslant\tau v(t). \tag{4.5}$$

Для малого $\Delta>0$ имеем

$$v(\Delta)=\hat{\hat{G}}(v, w)\Delta+v+o(\Delta);$$

$$\tilde{v}(\Delta)=\hat{\hat{G}}\left(\tau v, \frac{1}{\tau}w\right)\Delta+\tau v+o(\Delta)\geqslant\tau\,[\hat{\hat{G}}(v, w)\Delta+v]+o(\Delta).$$

Следовательно, при достаточно малом $\Delta>0$ (4.5) справедливо для всех $0\leqslant t\leqslant\Delta$, т. е. при достаточно малых $t$ оператор $U_t$ псевдовогнут. Для завершения доказательства остается заметить, что $U_t$ при любом $t>0$ может быть представлен в виде композиции псевдовогнутых операторов $U_s$ $(s \leqslant \Delta)$:

$$U_t = U_{ks} = U_s^k.$$

Композиция же псевдовогнутых операторов — псевдовогнутый оператор. ▲

Сопоставляя приведенные выше результаты, легко приходим к следующему выводу.

Теорема 4.3. *Пусть система* (4.1) *имеет положение равновесия* $x^* \in \operatorname{int} R_+^n$ *и оператор* $G$ *внедиагонально псевдовогнут; тогда положение равновесия* $x^*$ *единственно и асимптотически устойчиво на* $\operatorname{int} R_+^n$. ▲

В качестве примера системы дифференциальных уравнений, которая удовлетворяет предположениям теоремы 4.3, укажем следующую (см. § 3 главы III):

$$\dot{x}_1 = \operatorname{arctg} x_1 + \sqrt[10]{\frac{x_2}{x_1}} - x_1;$$

$$\dot{x}_2 = \sqrt{\frac{x_1 + x_2}{5 + x_1}} + \sqrt[10]{\frac{x_1}{x_2}} - x_2.$$

По существу, все перечисленные выше результаты сохраняют силу для неавтономной системы дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x} = \Gamma(t) G(x),$$

где $\forall i$: $\int\limits_0^\infty \gamma_i(t)\,dt = \infty$. Это замечание показывает, что АДС могут быть исследованы непосредственно на основе изучения функций-индикаторов (без перехода к оператору межэлементных связей). Аналоги приведенных здесь результатов имеют место также для неавтономных систем общего вида $\dot{x} = G(t, x)$, но методы исследования при этом должны быть ближе к тем, которые использовались в § 3.

## § 5. Случай гетерогенных связей

Из уже упоминавшихся ранее примеров видно, что на практике достаточно широко распространены гетерогенные системы — частный случай гетеротонных. Переформулировка результатов предыдущих трех параграфов для гетерогенных систем очевидна, и мы не будем на этом останавливаться *.

Здесь мы попытаемся обратить внимание на другой аспект изучения гетерогенных связей. Речь идет о выявлении и исполь-

* Для такой переформулировки надо лишь вспомнить некоторые результаты, изложенные в главе III (например, что сильная инвариантность конусного отрезка для гетерогенного оператора вытекает из обычной инвариантности).

зовании определенных структурных свойств системы, которые удобно формулировать в терминах следующих двух бинарных отношений. Пусть $i$-я компонента $f_i(x)$ оператора межэлементных связей $F(\boldsymbol{x})$ не убывает по $x_j$, тогда будем говорить, что элементы системы $A_i$ и $A_j$ находятся в отношении $\oplus$, и писать $A_i \oplus A_j$. В противном случае будем писать $A_i \ominus A_j$. [Если $A_j$ не влияет на $A_i$, т. е. $f_i(\boldsymbol{x})$ не зависит от $x_j$, то отношения $A_i \oplus A_j$ и $A_i \ominus A_j$ выполняются одновременно.]

Просматривая различные содержательные примеры, нетрудно заметить, что довольно часто в хаосе межэлементных связей системы присутствуют определенные закономерности. Нередко взаимное влияние любых двух элементов имеет один и тот же характер, т. е. структура межэлементных связей системы удовлетворяет аксиомам симметрии

$$A_i \oplus A_j \Leftrightarrow A_j \oplus A_i \quad (i \neq j); \tag{5.1}$$

$$A_i \ominus A_j \Leftrightarrow A_j \ominus A_i \quad (i \neq j). \tag{5.2}$$

Эти аксиомы достаточно естественно выглядят в рыночной модели, в модели массового обслуживания (см. примеры 4 и 6 в § 2 главы I) и ряде других.

В рыночной модели достаточно естественно выглядит также транзитивность отношения $\oplus$:

$$A_i \oplus A_j,\ A_j \oplus A_k \Rightarrow A_i \oplus A_k \quad (i \neq j \neq k). \tag{5.3}$$

Легко видеть, что предположение о наличии у рынка свойств (5.1)—(5.3) равносильно тому, что все товары распадаются на непересекающиеся группы, причем внутри каждой такой группы товары находятся между собой в отношении валовой заменимости, а любые два товара из разных групп находятся в отношении валовой дополнительности.

Среди простейших структурных свойств можно отметить также $(i \neq j \neq k)$:

$$A_i \ominus A_j,\ A_j \ominus A_k \Rightarrow A_i \ominus A_k; \tag{5.4}$$

$$A_i \oplus A_j,\ A_j \oplus A_k \Rightarrow A_i \ominus A_k; \tag{5.5}$$

$$A_i \ominus A_j,\ A_j \ominus A_k \Rightarrow A_i \oplus A_k. \tag{5.6}$$

Естественно ожидать, что информация о наличии у системы свойств типа (5.1)—(5.6) может быть эффективно использована. Заметим, что перечисленные свойства (5.1)—(5.6) ни в коем случае не являются системой аксиом, а представляют собой лишь множество аксиом, из которого можно выбирать ту или иную непротиворечивую систему. Кстати, мы уже отмечали выше, что отношения $A_i \oplus A_j$ и $A_i \ominus A_j$ иногда могут выполняться одновременно, и тогда существует произвол в фиксации того или иного отношения между элементами. Поэтому, интересуясь тем, удовлетворяет ли изучаемая система тому или иному набору аксиом, следует подразумевать возможность в рамках допустимого произвола (если таковой имеется) так однозначно установить отношения между элементами, что заданный набор аксиом будет удовлетворяться.

Установим два простых результата.

Теорема 5.1. *Пусть гетерогенная система удовлетворяет аксиомам* (5.1) — (5.3), (5.6), *а оператор* $F(x)$ *имеет на инвариантном конусном отрезке* $\langle v^0, w^0\rangle$ *единственную неподвижную точку* $x^*$. *Тогда любая невырожденная траектория процедуры* (1.1) *сходится к* $x^*$ *независимо от начального положения* $x^0 \in \langle v^0, w^0\rangle$.

Доказательство весьма просто. Легко видеть, что указанная система аксиом приводит к разбиению множества индексов $I=\{i \mid i=1, \ldots, n\}$ на два подмножества $K$ и $L$:

$$K \cap L = \varnothing; \quad K \cup L = I$$

таких, что

$$\forall i, j \in K : A_i \oplus A_j, \qquad \forall i \in K, j \in L : A_i \ominus A_j;$$

$$\forall i, j \in L : A_i \oplus A_j, \qquad \forall i \in L, j \in K : A_i \ominus A_j.$$

После замены координат

$$\forall i \in K : x_i' = x_i, \qquad \forall i \in L : x_i' = -x_i$$

система становится положительно гомогенной, и остается сослаться на теорему 1.1. ▲

Аналогичной заменой координат с последующим применением теоремы 2.1 к отрицательно гомогенной системе доказывается справедливость следующего утверждения.

Теорема 5.2. *Пусть квадрат оператора* $F$ *имеет единственную неподвижную точку* $x^* \in \langle v^0, w^0\rangle$ *и система удовлетворяет аксиомам* * (5.1), (5.2), (5.4), (5.5); *тогда любая невырожденная траектория процедуры* (1.1) *сходится к* $x^*$ *независимо от начального положения* $x^0 \in \langle v^0, w^0\rangle$. ▲

Приведенные теоремы действительно совсем простые. Проблема менее тривиального использования информации о структуре системы сопряжена с рядом вопросов, которые пока остаются открытыми. Некоторые результаты в этом направлении рассмотрены в главе IX, где речь идет о системах с векторными элементами.

## § 6. Движение по псевдоградиенту

Вернемся к рассмотрению динамической системы с непрерывным временем

$$\dot{x} = \Gamma(t) G(x). \tag{6.1}$$

* Такому набору аксиом удовлетворяет модель из примера 6 (§ 2, глава I) при условии $m=2$.

Если $G(\boldsymbol{x})$ — градиент некоторой функции (потенциала) $\varphi(\boldsymbol{x})$, т. е.

$$G(\boldsymbol{x}) = \operatorname{grad}\varphi(\boldsymbol{x}),$$

то вдоль любой траектории (6.1) значение функционала $\varphi(\boldsymbol{x})$ не убывает, так как

$$\frac{d\varphi(x)}{dt} = (\operatorname{grad}\varphi(\boldsymbol{x}),\ \Gamma(t)\operatorname{grad}\varphi(\boldsymbol{x})) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right)^2 \gamma_j(t) = \sum g_j^2(\boldsymbol{x})\,\gamma_j(t) \geqslant 0,$$

а при условии $\forall i: \gamma_i(t) > 0$ строго растет, пока не достигнет стационарной точки $\varphi(\boldsymbol{x})$.

Исходя из сказанного, ясно, что о движении (6.1) можно многое узнать на основе изучения свойств потенциала $\varphi(\boldsymbol{x})$.

Для того чтобы непрерывно дифференцируемый оператор $G(\boldsymbol{x}) = \{g_1(\boldsymbol{x}), \ldots, g_n(\boldsymbol{x})\}$ был градиентом некоторой функции, достаточно (и, разумеется, необходимо), чтобы были равны все перекрестные производные

$$\forall\, i, j: \frac{\partial g_i(x)}{\partial x_j} = \frac{\partial g_j(x)}{\partial x_i}.$$

Иногда сам оператор $G(\boldsymbol{x})$ не является градиентом, но оказывается возможным подобрать положительные интегрирующие множители $\mu_i(\boldsymbol{x}) > 0$ такие, что градиентом будет оператор с компонентами $\mu_i(\boldsymbol{x})\,g_i(\boldsymbol{x})$. В этом случае можно утверждать, что движение (6.1) будет иметь такой же характер, как и чисто потенциальное движение

$$\forall\, i: \dot{x}_i = \mu_i(\boldsymbol{x})\,g_i(\boldsymbol{x}), \tag{6.2}$$

в том смысле, что вдоль любой траектории (6.1) будет возрастать потенциал (6.2). Действительно, пусть $\psi(\boldsymbol{x})$ — потенциал (6.2), т. е.

$$\forall\, i: \frac{\partial\psi}{\partial x_i} = \mu_i(\boldsymbol{x})\,g_i(\boldsymbol{x}),$$

тогда в силу (6.1)

$$\frac{d\psi(x)}{dt} = \sum_{j=1}^{n} g_j^2(\boldsymbol{x})\,\mu_j(\boldsymbol{x})\,\gamma_j(t) \geqslant 0.$$

Конечно, задача о существовании интегрирующих множителей, да тем более обязательно положительных, весьма сложна. Но иногда она имеет очевидное решение, и в этих случаях можно получать интересные утверждения о «сходимости траекторий к множеству точек равновесия», т. е. о сходимости (в зависимости от реализации и начального положения) к одной из равновесных точек.

Для примера рассмотрим двухэлементную положительно гомогенную систему, функционирующую в непрерывном времени:

$$\dot{x}_1 = \gamma_1(t)\,[f_1(x_2) - x_1]; \qquad \dot{x}_2 = \gamma_2(t)\,[f_2(x_1) - x_2]. \tag{6.3}$$

Будем считать, что оператор $F(\boldsymbol{x}) = \{f_1(x_2), f_2(x_1)\}$ имеет инвариантный конусный отрезок $\langle \boldsymbol{v}^0, \boldsymbol{w}^0 \rangle$, и дополнительно предположим, что

$$\forall\, \boldsymbol{x} \in \langle \boldsymbol{v}^0, \boldsymbol{w}^0 \rangle : \frac{df_1(x_2)}{dx_2} > 0, \quad \frac{df_2(x_1)}{dx_1} > 0.$$

Очевидно, движение

$$\dot{x}_1 = \frac{df_2(x_1)}{dx_1}\,[f_1(x_2) - x_1];$$
$$\dot{x}_2 = \frac{df_1(x_2)}{dx_2}\,[f_2(x_1) - x_2] \tag{6.4}$$

имеет потенциальный характер, так как перекрестные производные у правых частей (6.4) равны, и даже соответствующий потенциал $\psi(\boldsymbol{x})$ здесь легко находится:

$$\psi(\boldsymbol{x}) = f_1(x_2)\,f_2(x_1) - x_1 f_2(x_1) - x_2 f_1(x_2) + \int_0^{x_1} f_2(\tau)\,d\tau + \int_0^{x_2} f_1(\tau)\,d\tau + \mathrm{const}.$$

Таким образом, (6.4) — движение вида

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \operatorname{grad} \psi(\boldsymbol{x}).$$

В свою очередь движение (6.3) происходит под острым углом к градиенту $\psi(\boldsymbol{x})$ $\left(\text{напомним, что интегрирующие множители } \frac{df_1(x_2)}{dx_2}, \frac{df_2(x_1)}{dx_1} \text{ здесь строго положительны}\right)$ и поэтому сходится (в невырожденном случае) к одной из стационарных точек $\psi(\boldsymbol{x})$, которые на $\langle \boldsymbol{v}^0, \boldsymbol{w}^0 \rangle$ заведомо найдутся.

В заключении параграфа рассмотрим несколько типичных ситуаций, в которых можно использовать идею псевдоградиентного движения (движения под острым углом к градиенту).

Довольно часто функции-индикаторы системы обладают определенной симметрией записи, что отражает равноправие, однотипность входящих в систему элементов. Пусть, например, функции-индикаторы системы $g_i(\boldsymbol{x})$ имеют вид

$$\forall\, i : g_i(\boldsymbol{x}) = \alpha\left(\sum_{j=1}^{n} x_j\right) - \beta_i(x_i). \tag{6.5}$$

Ясно, что в этом случае движение (6.1) имеет псевдоградиентный характер, так как перекрестные производные правых частей (6.5) равны.

К виду (6.5) легко приводятся функции-индикаторы в примере 7 (§ 2, глава II). В этом примере можно положить

$$g_i(R) = \frac{r + \sum\limits_j R_j}{E} - \frac{R_i}{V_i^0}.$$

К изучению движения $\dot{x} = g_i(x)$ с функциями $g_i(x)$ вида (6.5) сводится исследование различных других систем. Пусть, например,

$$\forall i : g_i(x) = \alpha\left(\sum_{j=1}^{n} a_j x_j\right) - \beta_i(x_i).$$

После замены $y_j = a_j x_j$ приходим к изучению движения $\dot{y} = \bar{g}_i(y)$, где

$$\bar{g}_i(y) = \alpha\left(\sum_{j=1}^{n} y_j\right) - \frac{1}{a_i}\beta_i\left(\frac{y_i}{a_i}\right).$$

То же самое можно проделать, если $\alpha(\cdot)$ в (6.5) зависит не от $\sum\limits_j x_j$, а от $\sum\limits_j \xi_j(x_j)$, где $\xi_j(\cdot)$ — строго монотонные функции.

Если движение (6.1) изучается на внутренности $R_+^n$ и $\alpha(\cdot)$ в (6.5) зависит от произведения $x_1, \ldots, x_n$, то можно с тем же успехом использовать замену $y_j = \ln x_j$.

Глава восьмая

# СИСТЕМЫ С ОГРАНИЧЕННЫМ МЕЖЭЛЕМЕНТНЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

Отсутствию взаимодействия между элементами системы естественно сопоставить условия

$$f_i(\boldsymbol{x}) = f_i^* = \text{const}, \qquad (0.1)$$

означающие, что текущее положение цели каждого элемента не зависит от состояния системы. Устойчивость равновесия в этом случае — совершенно тривиальный факт, но здесь закономерно возникает идея так установить ограничения на близость системы к условиям (0.1), чтобы устойчивость равновесия сохранилась. Это просте соображение и служит источником дальнейших построений.

## § 1. Ограничения в дифференциальной форме

Если не принимать во внимание различные специфические свойства системы, то понятно, что упомянутые выше условия близости системы к типу (0.1) придется формулировать в терминах тех или иных ограничений на приращение

$$F(\boldsymbol{x}+\Delta\boldsymbol{x}) - F(\boldsymbol{x})$$

по отношению к $\Delta\boldsymbol{x}$ (в противном случае в малой окрестности положения равновесия система «не будет связана никакими ограничениями»). В случае непрерывно дифференцируемого оператора межэлементных связей $F(\boldsymbol{x})$ (что пока предполагается) соответствующие условия естественно формулировать в виде дифференциальных неравенств.

В этой главе мы будем предполагать, что текущее положение цели $f_i(\boldsymbol{x})$ каждого элемента не зависит от $x_i$, т. е. от собственного состояния. Далее будут рассматриваться системы, удовлетворяющие одному из условий

$$\forall i: \sum_{j=1}^{n} \left|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right| < 1; \qquad \forall i: \sum_{j=1}^{n} \left|\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\right| < 1,$$

или в более удобной для дальнейшего форме

$$\forall i: -1+\sum_j \left|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right| < 0; \tag{1.1}$$

$$\forall i: -1+\sum_j \left|\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\right| < 0. \tag{1.2}$$

Подразумевается, что условия (1.1) и (1.2) выполняются в любой точке $x \in R^n_+$, характеризующей допустимое состояние системы. Если, например, неравенства (1.1) выполняются с некоторым запасом, т. е. для некоторого $\varepsilon > 0$

$$\forall i: -1+\sum_j \left|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right| \leqslant -\varepsilon, \tag{1.3}$$

то оператор $F$ — сжимающий по норме $\|x\|_m$ (§ 10, глава II) и равновесие заведомо существует и единственно. Аналогичное замечание можно сделать по поводу неравенств (1.2) (в этом случае оператор $F$ будет сжимающим по норме $\|x\|_l$). Однако далее мы будем предполагать, что равновесие существует, и тогда для изучения единственности и устойчивости равновесия усиление условий (1.1) и (1.2) оказывается ненужным.

С тем же успехом можно изучать динамику систем, которые удовлетворяют условиям, более общим, чем (1.1) и (1.2). Обобщение (1.1) имеет вид: существует набор положительных коэффициентов $\mu_1, \ldots, \mu_n$ (не зависящих от $x$) таких, что

$$\forall i: -\mu_i+\sum_j \mu_j \left|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right| < 0. \tag{1.4}$$

Условие (1.2) обобщается аналогично: существует набор положительных коэффициентов $\nu_1, \ldots, \nu_n$ таких, что

$$\forall i: -\nu_i+\sum_j \nu_j \left|\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\right| < 0. \tag{1.5}$$

О взаимосвязи приведенных условий мы будем говорить далее, а пока обратим внимание на возможность использования здесь широко распространенной в экономических исследованиях терминологии. Например, условие (1.1) означает, что матрица

$$F'(x)-E=\begin{pmatrix} -1 & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & -1 & \ldots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \ldots & -1 \end{pmatrix} \tag{1.6}$$

— матрица Адамара* при любом $\boldsymbol{x}$, а условие (1.4) означает, что матрица (1.6) имеет отрицательную доминирующую диагональ (ОДД)**. Условия (1.2) и (1.5) соответственно имеют смысл аналогичных утверждений относительно транспонированной матрицы (1.6).

Известно (см., например, [56]), что матрица $A$ (с постоянными элементами) имеет ОДД тогда и только тогда, когда ОДД имеет транспонированная матрица $A^T$. Отсюда можно сделать вывод об эквивалентности (1.4) и (1.5) в каждой фиксированной точке $\boldsymbol{x}$. Так как коэффициенты $\mu_i(\nu_i)$ по предположению не могут зависеть от $\boldsymbol{x}$, глобальная эквивалентность (1.4) и (1.5) в общем случае не имеет места (и это легко подтверждается примерами). Кстати, для линейных систем (что очевидно из сказанного выше) и для двухэлементных систем (что можно показать) условия (1.4) и (1.5) эквивалентны в целом.

О справедливости неравенств (1.1) и (1.2) можно судить и непосредственно на основании аналогичных по смыслу и форме записи свойств функций-индикаторов. Соответствующими аналогами будут условия

$$\forall i: \frac{\partial g_i}{\partial x_i} + \sum_{j \neq i} \left| \frac{\partial g_i}{\partial x_j} \right| < 0; \tag{1.7}$$

$$\forall i: \frac{\partial g_i}{\partial x_i} + \sum_{j \neq i} \left| \frac{\partial g_j}{\partial x_i} \right| < 0. \tag{1.8}$$

Неравенства (1.1) и (1.2) непосредственно вытекают из (1.7) и (1.8). Чтобы понять это, достаточно вспомнить, что связь между функциями-индикаторами и компонентами оператора межэлементных связей устанавливается соотношениями

$$\forall i: g_i(x_1, \ldots, x_{i-1}, f_i(\boldsymbol{x}), x_{i+1}, \ldots, x_n) = 0,$$

в силу которых на поверхности $\boldsymbol{x} = F(\boldsymbol{x})$

$$\forall i: \frac{\partial g_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial g_i}{\partial x_i} \frac{\partial f_i}{\partial x_j},$$

причем по определению функций-индикаторов $\dfrac{\partial g_i}{\partial x_i} < 0$.

Обратная импликация

$$(1.1) \Rightarrow (1.7), \ (1.2) \Rightarrow (1.8)$$

в общем случае, конечно, не верна.

---

* Матрицей Адамара называется матрица, у которой в каждой строчке диагональный элемент превосходит по модулю сумму модулей остальных элементов.

** При фиксированном $\boldsymbol{x}$ запись (1.4) и является собственно определением матрицы с отрицательно доминирующей диагональю.

Легко также видеть, что неравенства (1.4) и (1.5) вытекают соответственно из

$$\forall i: \mu_i \frac{\partial g_i}{\partial x_i} + \sum_{j \neq i} \mu_j \left| \frac{\partial g_i}{\partial x_j} \right| < 0; \tag{1.9}$$

$$\forall i: \nu_i \frac{\partial g_i}{\partial x_i} + \sum_{j \neq i} \nu_j \left| \frac{\partial g_j}{\partial x_i} \right| < 0. \tag{1.10}$$

Отметим, наконец, что более общие условия (1.9) и (1.10) легко сводятся к неравенствам вида (1.7) и (1.8) после перехода

$$g_i^{\text{нов}} = \mu_i g_i, \qquad x_i^{\text{нов}} = \frac{1}{\nu_i} x_i,$$

т. е. после изменения масштабов переменных или же перехода к новым функциям-индикаторам систему типа (1.9) или (1.10) всегда можно преобразовать в систему более простого типа (1.7) или (1.8).

## § 2. Теоремы о глобальной устойчивости

В этом параграфе мы изучим функционирование рассмотренных выше типов систем в дискретном времени в соответствии с уже обычной для нас процедурой

$$x^{k+1} = x^k + \Gamma_k [F(x^k) - x^k], \tag{2.1}$$

где $\Gamma_k = \operatorname{diag}(\gamma_1^k, \ldots, \gamma_n^k)$, $\gamma_i^k \in [0, 1]$.

Сделаем предварительно небольшое отступление. При условии $\Gamma_k \equiv E$ (2.1) переходит в итерационную процедуру

$$x^{k+1} = F(x^k), \tag{2.2}$$

связь которой с (2.1) состоит в следующем. В соответствии с (2.2 переход из точки $x^k$ в точку $x^{k+1}$ можно осуществить, делая по каждой координате $x_i$ шаг, равный

$$\Delta x_i(k) = f_i(x^k) - x_i^k.$$

Этот шаг будем называть «полным». При переходе (2.1) из $x^k$ в $x^{k+1}$ по каждой координате $x_i$ делается «укороченный» шаг, равный

$$\gamma_i^k \Delta x_i(k) = \gamma_i^k [f_i(x^k) - x_i^k].$$

Достаточно естественной здесь представляется попытка описать те случаи, в которых о сходимости (2.1) можно судить по сходимости (2.2). Наиболее широко распространенный способ установления сходимости (2.2) заключается в использовании принципа сжимающих отображений. Однако на основании того, что $F$ — сжимающее отображение в некоторой метрике $\rho$, трудно сказать что-либо определенное о сходимости (2.1). Причину трудностей раскрывает пример, изображенный на рис. 5, *а*, где $x^*$ — неподвижная точка сжимающего оператора $F$, а эллипс изображает некоторый шар с центром в $x^*$. Граничную точку шара $x^k$ оператор $F$ переводит внутрь шара [поэтому и сходится (2.2)], но в соответствии с (2.1) мы можем попасть в любую точку за-

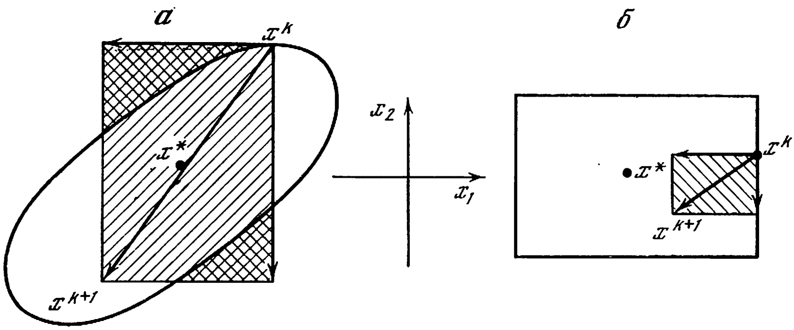



**Рис. 5**

штрихованного прямоугольника, а значит, и в дважды заштрихованные области, что приводит к увеличению расстояния от изображающей точки до положения равновесия. Геометрическая ситуация в качестве благоприятного позволяет лишь выделить случай метрики, в которой шарами являются прямоугольные параллелепипеды с ребрами, параллельными координатным осям * (рис. 5, *б*). Этот случай и дает основания для формулировки следующего результата.

Теорема 2.1. *Пусть оператор* $F: R^n \to R^n$ *имеет неподвижную точку* $x^* \in R^n$ *и удовлетворяет условию*

$$\forall x \neq y : \|F(x) - F(y)\|_m < \|x - y\|_m; \tag{2.3}$$

*тогда любая невырожденная траектория* (2.1) *сходится к* $x^*$ *независимо от начального положения* $x^0 \in R^n$, *и* $x^*$ *— устойчивое положение равновесия.*

Тот факт, что функция $\|x - x^*\|_m$ вдоль любой невырожденной траектории (2.1) не возрастает, очевиден. Единственная труд-

* Это вовсе не означает, что положительный вывод о сходимости (2.1) нельзя сделать в других случаях. Траектория (2.1), сходясь к равновесию $x^*$, временами может удаляться от $x^*$ по некоторой метрике, и в этом нет ничего криминального. Более того, просмотр ряда частных примеров показывает, что часто, переходя по правилу (2.1) в области типа дважды заштрихованных (рис. 5, *а*), мы в конечном итоге заводим траекторию в положение, из которого все шаги (2.1) уже уменьшают расстояние до $x^*$, и в некоторых условиях при этом можно сделать вывод о сходимости (2.1). Возможно, здесь имеются общие закономерности, но они пока не обнаружены.

ность здесь состоит в том, чтобы доказать, что ни одна сфера

$$\|x - x^*\|_m = \text{const}$$

не может полностью содержать невырожденную траекторию (2.1). Предположим противное. Пусть некоторая сфера $S = \{x \mid \|x - x^*\| = R\}$ полностью содержит некоторую невырожденную траекторию (2.1), начинающуюся в точке $x^0$.

Напомним, что

$$\|x\|_m = \max_i |x_i|.$$

Обозначим через $K$ множество тех индексов $i$, для которых

$$|x_i^0| = \max_j |x_j^0| = R.$$

Чтобы норма $\|x^k - x^*\|_m$ при движении (2.1) не менялась, нужно хотя бы по одной координате с номером из $K$ не двигаться (полагаем соответствующее $\gamma_i^k$ равным нулю). Но так как траектория невырожденна, то по каждой координате рано или поздно придется делать шаг. Если же $|x_j^k| = R$ и $\gamma_j^k > 0$, то заведомо $|x_j^{k+1}| < R$, так как $F$ в силу (2.3) отображает $S$ строго внутрь шара, который $S$ ограничивает. Поэтому невырожденная траектория (2.1), целиком лежащая в $S$, могла бы иметь (как это представляется на данном этапе рассуждений) лишь такой вид. Сначала делаются шаги по координатам с номерами $j \notin K$, пока траектория не «доберется» до некоторой точки $\tilde{x}$ такой, что $|\tilde{x}_i| = R$ не только для $i \in K$, но и для некоторых $i \notin K$. После этого можно делать шаги по координатам с номерами $i \in K$, не выходя за пределы $S$, и т. д. Однако если предположить существование точки $\tilde{x}$ с указанными свойствами, то для некоторого $j \notin K$ получим* $f_j(\tilde{x}) = R$, что противоречит (2.3). Устойчивость $x^*$ очевидна. ▲

Заметим теперь, что из (1.1) вытекает справедливость (2.3) (см. § 10 главы II). Поэтому для систем, удовлетворяющих условию (1.1) и имеющих положение равновесия, выводы теоремы 2.1 сохраняют силу.

Теорема 2.1 очевидным образом остается справедливой, если вместо $\|\cdot\|_m$ использовать в записи (2.3) преобразованную норму $\|\cdot\|_{mM}$ (см. § 10 главы II). В свою очередь справедливость условия типа (2.3) для нормы $\|\cdot\|_{mM}$ вытекает из (1.4).

Мы были бы избавлены от хлопот, если бы априори положили

$$\forall\, i,\, k : \gamma_i^k > 0, \tag{2.4}$$

т. е. не разрешали бы элементам «простаивать» часть времени.

---

* Напомним, что $f_j(x)$ мы считаем не зависящей явно от $x_j$.

Такое предположение мы используем при доказательстве следующей теоремы, хотя при определенных дополнительных затратах можно обойтись и без него.

Теорема 2.2. *Пусть оператор $F: R^n \to R^n$ имеет неподвижную точку $x^* \in R^n$ и удовлетворяет условию (1.2) [или же более общему (1.5)]; тогда любая невырожденная траектория (2.1) сходится к $x^*$ независимо от начального положения $x^0 \in R^n$ и $x^*$ — устойчивое положение равновесия.*

Доказательство. Условие (1.2) означает (см. § 10 главы II), что

$$\forall x : \|F'(x)\|_l < 1,$$

поэтому для любых $x \neq y$

$$\|F(x) - F(y)\|_l \leqslant \|F'(z)\|_l \|x - y\|_l < \|x - y\|_l.$$

Отсюда сразу следует единственность положения равновесия $x^*$.

Рассмотрим теперь непрерывную функцию

$$\varphi(x) = \|F(x) - x\|_l = \sum_{i=1}^{n} |f_i(x) - x_i|,$$

достигающую минимального значения 0 при $x = x^*$.

Для того чтобы доказать сходимость $x^k \to x^*$ на невырожденных траекториях (2.1), достаточно показать, что *

$$\varphi(x^{k+1}) < \varphi(x^k). \tag{2.5}$$

Обозначим $\Delta x^k = \Gamma_k [F(x^k) - x^k]$ и введем вспомогательную функцию

$$\psi(t) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i [f_i(x^k + t\Delta x^k) - x_i^k - t\Delta x_i^k],$$

где $t \in [0, 1]$, а $\varepsilon_i$ — произвольные числа.

Очевидно, при

$$\varepsilon_i = \operatorname{sign} [f_i(x^k + \Delta x^k) - x_i^k - \Delta x_i^k] \tag{2.6}$$

имеет место $\psi(1) = \varphi(x^{k+1})$.

* Или, если не делать предположения (2.4), $\varphi(x^{k+1}) \leqslant \varphi(x^k)$ плюс невозможность
$\forall k : \varphi(x^k) = \text{const} \neq 0$.

По теореме Лагранжа о конечном приращении функции

$$\psi(1)=\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i [f_i(x^k+\Delta x^k)-x_i^k-\Delta x_i^k]=\psi(0)+\psi'(\theta)=$$

$$=\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \left[f_i(x^k)-x_i^k+\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial (f_i(z)-x_i)}{\partial x_j} \gamma_j^k (f_j(x^k)-x_j^k)\right], \tag{2.7}$$

где $\theta \in [0, 1]$, $z=x^k+\theta\Delta x^k$.

Для $\varepsilon_i$, определяемых равенствами (2.6), соотношение (2.7) приводит к неравенству

$$\varphi(x^{k+1})=\|F(x^{k+1})-x^{k+1}\| \leqslant \|B[F(x^k)-x^k]\|_l \leqslant \|B\|_l \varphi(x^k),$$

где

$$B=\begin{bmatrix} 1-\gamma_1^k & \gamma_2^k \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \gamma_n^k \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \gamma_1^k \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & 1-\gamma_2^k & \dots & \gamma_n^k \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \gamma_1^k \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \gamma_2^k \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & 1-\gamma_n^k \end{bmatrix}.$$

Если имеет место (1.2), то

$$\|B\|_l=\max_i \left[1-\gamma_i^k \left(1-\sum_j \left|\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\right|\right)\right]<1,$$

что обеспечивает справедливость (2.5).

Устойчивость положения равновесия $x^*$ очевидна. ▲

При использовании в качестве исходного условия (1.5) схема доказательства остается прежней, надо лишь вместо $\|\cdot\|_l$ взять преобразованную норму $\|\cdot\|_{lM}$.

## § 3. Ограничения в конечных приращениях

При изучении вопросов динамики вместо дифференциальных ограничений § 1 можно использовать их конечные аналоги, которые здесь и будут рассмотрены. Мы ограничимся аналогами условий (1.7) и (1.8). Далее используется обозначение

$$\Delta g_i(x)=g_i(x+\Delta x)-g_i(x).$$

Аналог (1.7). Пусть $\Delta x \neq 0$ и

$$|\Delta x_j|=\max_i |\Delta x_i|;$$

тогда

$$\Delta g_j(x)\,\Delta x_j < 0. \tag{3.1}$$

Аналог (1.8). Пусть $\Delta x \neq 0$. Тогда

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta g_i(x)\,\mathrm{Sign}\,\Delta x_i < 0, \tag{3.2}$$

где $\mathrm{Sign}\,\alpha$ — многозначная функция, принимающая при $\alpha=0$ все значения из сегмента $[-1,1]$ и при $\alpha\neq 0$ совпадающая с обычной функцией $\mathrm{sign}\,\alpha$.

Обсудим первое из указанных условий. Для функций-индикаторов вида

$$g_i(x) = f_i(x) - x_i$$

из условия (3.1) следует, что оператор межэлементных связей

$$F(x) = \{f_1(x),\ \ldots,\ f_n(x)\}$$

удовлетворяет условию (2.3). Действительно, так как $f_j(x)$ не зависит явно от $x_j$, то $\Delta x_j$ можно как угодно менять, не меняя $\Delta f_j(x)$. Учитывая это, легко вывести

$$\max_i |\Delta f_i(x)| < \max_i |\Delta x_i|,$$

но это и есть условие (2.3).

Конечно, условие (3.1) более общее, чем (1.7), так как оно не предполагает непрерывную дифференцируемость $g_i(x)$. Даже в случае непрерывно дифференцируемых $g_i(x)$ условие (3.1) может быть выполнено, а (1.7) нарушено [но «не сильно», так как из (3.1) в этом случае вытекает справедливость (1.7) после замены знака $<$ на $\leqslant$]. Справедливость (3.1) из (1.7) следует автоматически. Доказательство этого факта предоставляется читателю.

Прокомментируем теперь второе условие. В иллюстративных целях проследим связь между (3.2) и (1.8) более детально.

Установим предварительно вспомогательный результат.

Лемма 3.1. *Для того чтобы при любом $x\neq 0$ выполнялось неравенство*

$$\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i\,\mathrm{Sign}\,x_j < 0 \quad (\leqslant 0), \tag{3.3}$$

*необходимо и достаточно, чтобы*

$$\forall\, i: \alpha_{ii} + \sum_{j\neq i} |\alpha_{ij}| < 0 \quad (\leqslant 0). \tag{3.4}$$

Необходимость. Фиксируем произвольное $i$, и положим в (3.3)

$$x_i=1, \qquad x_j=0\ (j\neq i), \qquad \operatorname{Sign} x_j=\operatorname{sign}\alpha_{ij}.$$

В результате получим (3.4).

Достаточность. Пусть справедливо (3.4); тогда для $x\neq 0$ имеем

$$\sum_{i,j}\alpha_{ij}x_i\operatorname{Sign}x_j\leqslant\sum_i|x_i|\Big(\alpha_{ii}+\sum_{j\neq i}|\alpha_{ij}|\Big)<0\ (\leqslant 0). \ \blacktriangle$$

Теорема 3.1. *Если $g_i(\boldsymbol{x})$ непрерывно дифференцируемы, то (1.8) влечет за собой (3.2), а из (3.2) следует справедливость (1.8) в ослабленной форме (т. е. после замены знака $<$ на $\leqslant$).*

Доказательство. Пусть справедливо (1.8). Рассмотрим функцию

$$\xi(t)=\sum_{j=1}^{n}[g_i(\boldsymbol{x}+t\Delta\boldsymbol{x})-g_j(\boldsymbol{x})]\operatorname{Sign}\Delta x_j.$$

Очевидно, $\xi(1)<0$ равносильно (3.2). Пользуясь теоремой Лагранжа о конечном приращении функции и предыдущей леммой, получаем

$$\xi(1)=\sum_j\sum_i\frac{\partial g_j(z)}{\partial x_i}\Delta x_i\operatorname{Sign}\Delta x_j<0, \tag{3.5}$$

где $\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}+\theta\Delta\boldsymbol{x}$, $\theta\in[0,\ 1]$.

Пусть теперь имеет место (3.2); тогда $\xi(t)/t<0$ при $t>0$, т. е.

$$\frac{\xi(t)}{t}=\sum_j\sum_i\frac{\partial g_j(x)}{\partial x_i}\Delta x_i\operatorname{Sign}\Delta x_j+o(1)<0.$$

Отсюда

$$\sum_{j,i}\frac{\partial g_j(x)}{\partial x_i}\Delta x_i\operatorname{Sign}\Delta x_j\leqslant 0,$$

и окончательный вывод получается применением леммы 3.1. $\blacktriangle$

Назовем переменную $x_i$ усилием (действием) $i$-го элемента. а значение функции индикатора $g_i(\boldsymbol{x})$— его результатом. В главе IV мы уже отмечали, что в системе «действия-результаты» иногда все результаты могут быть противоположны ожидаемым, и в особый класс выделили те системы, в которых подобная ситуация невозможна. Совершенно очевидно, что системы, удовлетворяющие одному из условий (3.1), (3.2)—универсальные $P$-системы по приращению, т. е. в таких системах при любом $\Delta\boldsymbol{x}\neq 0$ хотя бы один результат ожидаемый *. Но условия (3.1) и (3.2) имеют также более сильный характер. Так, (3.1) означает, что

* Так как $g_i(x)$ строго убывает по $x_i$, то при $\Delta x_i>0$ ожидаемым является уменьшение $g_i$ (см. главу IV).

желаемого результата добивается по крайней мере тот, кто более других изменяет свое усилие. Для соответствующей трактовки неравенства (3.2) разобьем все элементы на две группы $P$ и $Q$. Из (3.2), например, вытекает следующее. Пусть элементы группы $P$ увеличивают (уменьшают) свои усилия, а элементы из $Q$ усилий не меняют. Тогда суммарное изменение результатов по группе $P$ отрицательно (положительно), т. е. ожидаемо. Это как бы групповой аналог убывания функций-индикаторов $g_i(\boldsymbol{x})$ по собственным переменным. Здесь «функция-индикатор группы $P$»

$$g_P(\boldsymbol{x}) = \sum_{i \in P} g_i(\boldsymbol{x})$$

убывает по группе собственных переменных. Приведенное утверждение не исчерпывает содержательного смысла неравенства (3.2), и поэтому интерпретация здесь может углубляться далее.

Отметим в заключение, что некоторое усиление условий (3.1) и (3.2) обеспечивает автоматическое существование равновесия [по этому поводу см. теорему 3.4 в главе V].

## § 4. Случай непрерывного времени

Пусть система функционирует в непрерывном времени, т. е.

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \Gamma(t) G(\boldsymbol{x}), \tag{4.1}$$

где $\Gamma(t) = \operatorname{diag}(\gamma_1(t), \ldots, \gamma_n(t))$.

Естественно ожидать, что для теорем 2.1 и 2.2 здесь имеются соответствующие аналоги, и это действительно так. Как и в дискретном случае, возможность временного бездействия элементов [т. е. возможность обнуления $\gamma_i(t)$ на некоторых промежутках времени] здесь — источник некоторых технических неудобств (см. § 2). Поэтому для простоты мы будем предполагать $\forall i,\ t : \gamma_i(t) > 0$.

Теорема 4.1. *Пусть система имеет положение равновесия $\boldsymbol{x}^* \in R^n$, а функции-индикаторы удовлетворяют условию (3.1); тогда любая невырожденная траектория (4.1) сходится к $\boldsymbol{x}^*$ независимо от начального положения $\boldsymbol{x}(0) \in R^n$ и $\boldsymbol{x}^*$ — устойчивое положение равновесия.*

Для доказательства, очевидно, достаточно показать, что функция

$$\chi(\boldsymbol{x}) = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^*\|_m = \max_i |x_i - x_i^*| \tag{4.2}$$

вдоль любой траектории (4.1) строго убывает, пока изображающая точка не достигнет $\boldsymbol{x}^*$.

Через $I_x$ обозначим множество тех индексов $j$, для которых

$$|x_j - x_j^*| = \max_i |x_i - x_i^*|.$$

Пусть $x \neq x^*$; тогда

$$\frac{d\chi}{dt} = \frac{d}{dt} \max_i |x_i - x_i^*| = \max_{j \in I_x} \frac{d}{dt} |x_j - x_j^*| = \max_{j \in I_x} [\dot{x}_j \operatorname{sign}(x_j - x_j^*)] =$$

$$= \max_{j \in I_x} [\gamma_j(t) g_j(x) \operatorname{sign}(x_j - x_j^*)] =$$

$$= \max_{l \in I_x} [\gamma_j(t) [g_j(x) - g_j(x^*)] \operatorname{sign}(x_j - x_j^*)] < 0\,^*.$$

Мы здесь использовали свойство (3.1) и очевидные равенства $g_j(x^*) = 0$. ▲

При изучении систем типа (3.2) вместо (4.2) естественно взять (по аналогии с дискретным случаем) функцию

$$\omega(x) = \|G(x)\|_l = \sum_{i=1}^{n} |g_i(x)|.$$

Вычисляя производную $\omega(x)$ вдоль траектории (4.1), получаем

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{n} |g_i(x)| = \sum_{i: g_i(x) \neq 0} \operatorname{sign} g_i(x) \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g_i(x)}{\partial x_j} \gamma_j g_j(x) +$$

$$+ \sum_{i: g_i(x) = 0} \left| \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g_i(x)}{\partial x_j} \gamma_j g_j(x) \right|.$$

Если имеет место (1.8), то по лемме 3.1 из (4.3) следует

$$\frac{d\omega}{dt} < 0.$$

Теперь в предположении существования равновесия можно сделать те же выводы, что и в теореме 4.1.

Приведенные рассуждения, однако, предполагают непрерывную дифференцируемость функций $g_i(x)$ и опираются на условие (1.8). На самом деле окончательный вывод остается в силе, если предполагать лишь непрерывность $g_i(x)$ и справедливость условия (3.2). Доказательство этого факта предоставим читателю, а здесь сформулируем его в виде отдельной теоремы.

Теорема 4.2. *Пусть система, удовлетворяющая условию* (3.2) *имеет положение равновесия $x^* \in R^n$; тогда любая невырожденная траектория* (4.1) *сходится к $x^*$ независимо от начального положения $x(0) \in R^n$ и $x^*$ — устойчивое положение равновесия.* ▲

---

* Мы показали лишь строгое убывание функции $\chi$ на траекториях (4.1). Для окончательного вывода о сходимости $x(t)$ к равновесию необходимо учесть невырожденность траектории.

## § 5. Примеры

Уже упоминавшаяся интерпретация условия типа (3.1) (желаемого результата добивается по крайней мере тот, кто более других изменяет свое усилие) может служить естественной основой для различных содержательных примеров. Здесь мы рассмотрим пример, где условие (3.1) не только выглядит правдоподобным, но и непосредственно устанавливается.

Пример 1. Вернемся к рыночной модели, описанной в § 6 главы III. Предположим, что все товары на рынке обладают валовой заменимостью и все функции

$$\tilde{g}_i(x_0, x_1, \ldots, x_n), \; i=1, \ldots, n$$

строго возрастают по $x_0$.

Перейдем к новым переменным

$$y_j = \ln x_j, \qquad j=0, \ldots, n$$

и обозначим

$$\tilde{h}_i(y_0, y_1, \ldots, y_n) = \tilde{g}_i(e^{y_0}, e^{y_1}, \ldots, e^{y_n}).$$

Ясно, что существование равновесия и его устойчивость в исходной системе вытекают из существования и устойчивости равновесия в системе с переменными $y_1, \ldots, y_n$ и функциями-индикаторами

$$h_i(y_1, \ldots, y_n) = \tilde{h}_i(1, y_1, \ldots, y_n). \tag{5.1}$$

Убедимся теперь, что функции-индикаторы (5.1) удовлетворяют условию (3.1). Пусть

$$\Delta x_j = \max_i |\Delta x_i| > 0;$$

тогда *

$$\begin{aligned} h_j(\mathbf{y} + \Delta \mathbf{y}) = \tilde{h}_j(1, y_1 + \Delta y_1, \ldots, y_n + \Delta y_n) < \\ < \tilde{h}_j(1 + \Delta y_j, y_1 + \Delta y_j, \ldots, y_n + \Delta y_j) = \\ = \tilde{h}_j(1, y_1, \ldots, y_n) = h_j(\mathbf{y}). \end{aligned}$$

Случай $\Delta x_j < 0$ рассматривается аналогично.

Последующие примеры иллюстрируют работоспособность условия (3.2).

Пример 2. Пусть $n$ переменных электрических сопротивлений $R_i$ соединены последовательно с батареей, имеющей ЭДС $E$ и внутреннее сопротивление $R$ (см. § 2 главы I, пример 7).

---

* Здесь мы используем однородность функций $\tilde{h}_i$ по сдвигу переменных. Это вытекает из того, что функции $\tilde{g}_i$ однородны нулевой степени (см. § 6 главы III).

Легко проверить, что функции-индикаторы

$$V_i^0 - \frac{R_i E}{R + \sum_j R_j} \qquad (5.2)$$

удовлетворяют условию (3.2).

Интересно отметить, что в данном случае после некоторых преобразований можно воспользоваться и условием (3.1). С этой целью перейдем от (5.2) к функциям-индикаторам

$$\left(V_i^0\left(R + \sum_j R_j\right) / R_i\right) - E, \qquad (5.3)$$

которые получаются домножением функций (5.2) на строго положительные множители $(R + \sum_j R_j)/R_i$ (считается, что все $R_i > 0$). Ясно, что функции-индикаторы (5.2) и (5.3) эквивалентны. Теперь легко проверить, что функции (5.3) после перехода к новым переменным $x_j = \ln R_j$ удовлетворяют условию (3.1).

Пример 3. В схеме предыдущего примера условие (3.2) остается работоспособным и в том случае, когда «сопротивления» $R_i$ нелинейны. Пусть вольтамперная характеристика $i$-го «сопротивления» имеет вид

$$V_i = \varphi_i(I, R_i),$$

где $V_i$ — напряжение, $I$ — ток, $R_i$ — параметр сопротивления. Предполагается, что функции $\varphi_i$ возрастают по $I$ и $R_i$.

Понятно, что ток в цепи (даже в случае непостоянного внутреннего сопротивления источника) можно представить как убывающую функцию от суммы $\sum_i V_i$, т. е.

$$I = I\left(\sum_i V_i\right),$$

откуда

$$V_i = \varphi_i\left(I\left(\sum_j V_j\right), R_i\right) = \psi_i\left(\sum_j V_j, R_i\right), \qquad (5.4)$$

где функции $\psi_i$ убывают по первому аргументу и возрастают по второму.

Очевидно, при любом допустимом наборе $R_1, \ldots, R_n$ уравнения (5.4) в совокупности определяют однозначное решение

$$V_i = V_i(R_1, \ldots, R_n).$$

Покажем, что набор функций-индикаторов

$$g_i(R_1, \ldots, R_n) = -V_i = -\psi_i\left(\sum_j V_j(R_1, \ldots, R_n), R_i\right)$$

удовлетворяет условию (3.2).

Пусть $\Delta\boldsymbol{R}=\{\Delta R_1, \ldots, \Delta R_n\}\neq 0$. Обозначим через $P$ множество тех индексов $i$, для которых $\Delta R_i>0$. Пусть

$$\Delta V=\sum_j \Delta V_j=\sum_j [V_j(\boldsymbol{R}+\Delta\boldsymbol{R})-V_j(\boldsymbol{R})]>0;$$

в этом случае $\Delta V_j\leqslant 0$ для $j\notin P$, что вытекает из убывания $\psi_i(V, R_j)$ по $V$ и возрастания по $R_i$. Но так как $\Delta V>0$, то $P$ заведомо непусто, причем

$$\sum_{i\in P} \Delta V_i>\sum_{i\notin P} |\Delta V_i|\geqslant 0,$$

откуда

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta V_i \operatorname{Sign} \Delta R_i>0, \tag{5.5}$$

т. е. для $g_i(\boldsymbol{R})=-V_i(\boldsymbol{R})$ выполняется (3.2). Остальные альтернативы $\Delta V=0$ и $\Delta V<0$ рассматриваются аналогично и приводят к тому же результату (5.5).

Пример 4. Пусть $n$ элементов $A_i$ решают общую задачу распределения ресурса, запас которого в каждый плановый период функционирования системы равен $X$. Каждый элемент $A_i$, перерабатывая $x_i$ единиц ресурса, дает доход $\varphi_i(x_i)$. Производственные функции $\varphi_i(x_i)$ $(x_i\geqslant 0)$ будем предполагать неотрицательно определенными, непрерывно дифференцируемыми и строго вогнутыми, считая также, что $\varphi_i'(x_i)$ убывает от $\infty$ до 0 при изменении $x_i$ от 0 до $\infty$. Цель системы — решение экстремальной задачи

$$\sum_i \varphi_i(x_i)\rightarrow \max; \qquad \sum_i x_i=X, \tag{5.6}$$

которая не может быть решена непосредственно, если функции $\varphi_i(\cdot)$ заранее не известны. В этом случае возникает необходимость такой организации функционирования системы, чтобы оптимальность режима (или близость к оптимальному режиму) в соответствии с (5.6) обеспечивалась использованием неполной информации о производственных функциях.

Достаточно естественным выглядит предположение о том, что каждому $i$-му элементу известна локальная информация о своей производственной функции, т. е. ее поведение в некоторой окрестности рабочей точки $x_i$ [например, значение производной $\varphi_i'(x_i)$] *.

Пусть (в соответствии с подходом Корнаи — Липтака) каждый элемент $A_i$ сообщает управляющему органу величину $s_i$ —

---

* Отмечая естественность такого предположения, мы имеем в виду ассоциации с реальными задачами. Сама же по себе рассматриваемая модель, конечно, носит условный характер.

его собственную оценку значения производной $\varphi_i'(x_i)$. Управляющий орган распределяет ресурс в соответствии с некоторым правилом вида

$$x_i = x_i(s) = X \frac{\alpha_i(s_i)}{\sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j(s_j)}, \tag{5.7}$$

где $\alpha_i(s_i)$ $(s_i \geqslant 0)$ — непрерывные возрастающие функции, например $\alpha_i(s_i) \sim s_i^N$.

Будем считать, что цель каждого элемента состоит в сообщении истинного значения производной $\varphi_i'(x_i)$ в текущей рабочей точке. Предположим, однако, что каждый $A_i$ не знает точного значения $\varphi_i'(x_i)$ в рабочей точке, но в состоянии выяснить, в каком отношении с $\varphi_i'(x_i)$ находится величина $s_i$, сообщенная им в управляющий орган [т. е. завышена или занижена оценка $\varphi_i'(x_i)$]. Другими словами, каждый элемент $A_i$ способен судить о знаке функции

$$\varphi_i'(x_i(s)) - s_i, \tag{5.8}$$

которую мы примем за его функцию-индикатор *.

Перейдем теперь от функций-индикаторов (5.8) к эквивалентным, более удобным для анализа.

Очевидно, уравнение

$$\varphi_i'(\hat{x}_i) - s_i = 0$$

относительно $\hat{x}_i$ имеет однозначное решение $\hat{x}_i(s_i)$. Функция $\hat{x}_i(s_i)$ непрерывна и строго убывает по $s_i$. Легко видеть, что функции (5.8) и

$$\hat{x}_i(s_i) - x_i(s_i) \tag{5.9}$$

как функции-индикаторы эквивалентны. Набор же функций (5.9) удовлетворяет условию (3.2). Это легко проверить, учитывая (5.7) и строгое убывание $\hat{x}_i(s_i)$ по $s_i$.

Отметим, наконец, один существенный момент, который с точки зрения динамики коллективного поведения второстепенный, но представляет интерес в другом отношении. Если функции $\alpha_i(s_i)$ в (5.7) растут по $s_i$ достаточно быстро [например, $\alpha_i(s_i) \sim s^N$, где $N$ достаточно велико], то в равновесной точке $s^*$

$$s_1^* \approx s_2^* \approx \ldots \approx s_n^*. \tag{5.10}$$

---

* Мы здесь обходим стороной более естественные постановки задачи, отражающие наличие у элементов индивидуальных интересов и стремление к их достижению. В таком плане модели распределения ресурсов рассматриваются в главе X.

Это легко понять, анализируя функции-индикаторы (5.8) и учитывая, что быстрый рост функций $\alpha_i(s_i)$ реализует следующее правило распределения ресурса: подавляющая часть ресурса отдается тому (тем), кто сообщает максимальное значение $s_i$. Условие же (5.10) означает, что равновесное распределение ресурса в системе $x_1^*, \ldots, x_n^*$ близко к оптимальному, так как (5.10) влечет за собой

$$\varphi_1'(x_1^*) \approx \ldots \approx \varphi_n'(x_n^*),$$

что близко к классическому условию

$$\forall i : \varphi_i'(x_i^*) = \lambda = \mathrm{const}.$$

## § 6. Еще об одном типе ограничений

При рассмотрении условий типа (3.1) и (3.2) достаточно естественной представляется попытка указать другие разновидности неравенств, также обеспечивающих единственность равновесия и его устойчивость. Здесь мы рассмотрим системы, удовлетворяющие условию

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta g_i(\boldsymbol{x}) \Delta x_i < 0, \qquad \Delta \boldsymbol{x} \neq 0. \tag{6.1}$$

Ясно, что такие системы могут иметь не более одного положения равновесия [если положений равновесия два, $\boldsymbol{x}^*$ и $\boldsymbol{x}^{**}$ ($\boldsymbol{x}^* \neq \boldsymbol{x}^{**}$), то нарушается (6.1) при $\Delta \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{x}^{**}$]. Если набор функций-индикаторов системы удовлетворяет более сильному условию

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta g_i(\boldsymbol{x}) \Delta x_i \leqslant -\alpha \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i^2,$$

где $\alpha > 0$ не зависит от $\boldsymbol{x}$, то положение равновесия заведомо существует, что легко устанавливается с помощью теоремы 3.4 главы V.

Условию (6.1) соответствует дифференциальный аналог — отрицательная определенность матрицы Якоби

$$\frac{dG(\boldsymbol{x})}{d\boldsymbol{x}} = \left[ \frac{\partial g_i(\boldsymbol{x})}{\partial x_j} \right]. \tag{6.2}$$

Действительно, если в любой точке $\boldsymbol{x} \in R^n$ матрица (6.2) отрицательно определена, то (6.1) заведомо справедливо. Чтобы показать это, достаточно применить к функции

$$\xi(\tau) = \sum_{i=1}^{n} [g_i(\boldsymbol{x} + \tau \Delta \boldsymbol{x}) - g_i(\boldsymbol{x})] \Delta x_i, \quad \tau \in [0, 1]$$

теорему Лагранжа о среднем, что дает

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta g_i(\boldsymbol{x}) \Delta x_i = \xi(1) = \sum_{i,j} \frac{\partial g_i(\boldsymbol{z})}{\partial x_j} \Delta x_i \Delta x_j < 0,$$

где $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + \theta \Delta \boldsymbol{x}$, $\theta \in [0, 1]$, $\Delta \boldsymbol{x} \neq 0$.

Асимптотическую устойчивость положения равновесия условие (6.1) не гарантирует, но обеспечивает асимптотическую устойчивость равновесия для системы

$$\dot{\boldsymbol{x}} = G(\boldsymbol{x}). \tag{6.3}$$

Действительно, в силу (6.3)

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_i^*)^2 = 2 \sum_{i} (x_i - x_i^*)(g_i(\boldsymbol{x}) - g_i(\boldsymbol{x}^*)) < 0,$$

где $\boldsymbol{x}^*$ — положение равновесия (6.3). Отсюда в очевидных предположениях легко сделать требуемый вывод.

Конечно, по сравнению с (4.1) уравнение движения (6.3) имеет весьма специальный характер, но и оно может представлять интерес с точки зрения решаемого нами круга задач. Действительно, в определенных условиях может ставиться задача согласования коллективного поведения элементов, и тогда способ движения (6.3) может оказаться одним из приемлемых вариантов согласованного поведения.

Рассмотрим для примера следующую модель. Усилие $i$-го элемента системы $A_i$ характеризуется величиной $x_i$. Совместное применение векторного усилия $\boldsymbol{x} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ дает системе выигрыш (доход) $\varphi(\boldsymbol{x})$, который делится между элементами в определенной пропорции. Ясно, что элементы заинтересованы в достижении максимума $\varphi(\boldsymbol{x})$, но в отсутствии полной информации о функции $\varphi(\boldsymbol{x})$ цель может быть достигнута лишь с помощью организации некоторой процедуры поиска. Пусть для элемента $A_i$ наблюдаемой (или вычисляемой) является функция $g_i(\boldsymbol{x}) = \partial\varphi/\partial x_i$. По совместной договоренности элементы могут вести себя в соответствии с правилом

$$\dot{x}_i = g_i(\boldsymbol{x}),$$

что в совокупности дает (6.3).

Предположим теперь, что непрерывно дифференцируемая функция $\varphi(\boldsymbol{x})$ имеет максимум и строго вогнута. В этом случае легко показать, что набор функций

$$g_i(\boldsymbol{x}) = \partial\varphi/\partial x_i$$

удовлетворяет условию (6.1). Действительно, в силу строгой вогнутости $\varphi(\boldsymbol{x})$ функция

$$\xi(t) = \frac{d}{dt} \varphi(\boldsymbol{x} + t\Delta \boldsymbol{x}) = (\operatorname{grad} \varphi(\boldsymbol{x} + t\Delta \boldsymbol{x}), \Delta \boldsymbol{x})$$

строго убывает, поэтому

$$(\operatorname{grad} \varphi(\boldsymbol{x}+\Delta \boldsymbol{x})-\operatorname{grad} \varphi(\boldsymbol{x}), \Delta \boldsymbol{x})=\xi(1)-\xi(0)<0. \qquad (6.4)$$

Но в данном случае (6.4) и есть условие (6.1). Таким образом, процедура (6.3) в указанных предположениях здесь гарантирует успех.

Рассмотрим другой пример. Пусть

$$g_i(\boldsymbol{x})=\begin{cases}-\dfrac{\partial U(x)}{\partial x_i}, & i=1, \ldots, m; \\ \dfrac{\partial U(x)}{\partial x_i}, & i=m+1, \ldots, n,\end{cases} \qquad (6.5)$$

где функция $U(\boldsymbol{x})$ непрерывно дифференцируема, строго выпукла по совокупности переменных $(x_1, \ldots, x_m)$ и строго вогнута по $(x_{m+1}, \ldots, x_n)$. В этих предположениях нетрудно показать, что набор функций-индикаторов (6.5) также удовлетворяет условию (6.1), поэтому при условии существования равновесия [седловой точки $U(\boldsymbol{x})$] все траектории (6.3) сходятся к $\boldsymbol{x}^*$.

## § 7. Линейные системы

Рассмотрим систему с линейным оператором межэлементных связей

$$F(\boldsymbol{x})=A\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}$$

(диагональные элементы матрицы $A=[a_{ij}]$ равны нулю).

Результаты предыдущих параграфов в данном случае приводят к следующему достаточному условию сходимости процедур (2.1) и (4.1) [см. (1.4)]:

$$\exists\, \mu_1, \ldots, \mu_n>0 \ \forall i: -\mu_i+\sum_{j=1}^{n} \mu_j|a_{ij}|<0. \qquad (7.1)$$

Условие (7.1) — не что иное, как требование существования доминирующей диагонали у матрицы $E-A$. Другая интерпретация (7.1) состоит в том, что существует преобразованная кубическая норма $\|\cdot\|_{mM}$ (см. главу II, § 10), по которой оператор $F$ — сжимающий, т. е. $\|A\|_{mM}<1$.

Поскольку любая линейная система очевидным образом гетерогенна, представляет интерес сравнение указанного выше результата с тем, что дают в линейном случае теоремы предыдущей главы. С этой целью установим несколько вспомогательных утверждений *.

---

* Без ограничения общности далее предполагается $\boldsymbol{b}=0$, т. е. $F(\boldsymbol{x})=A\boldsymbol{x}$. Этого всегда можно добиться перемещением начала системы координат в $\boldsymbol{x}^*$ (матрица $E-A$ считается невырожденной).

Лемма 7.1. *Для того чтобы линейный оператор (матрица) $A$ отображал в себя некоторый конусный отрезок $\langle -v^0, w^0\rangle (v^0, w^0 \geqslant 0)$, необходимо и достаточно выполнение ослабленного условия* (7.1), *а именно*:

$$\exists \mu_1, \ldots, \mu_n > 0 \ \forall i: -\mu_i + \sum_{j=1}^{n} \mu_j |a_{ij}| \leqslant 0. \tag{7.2}$$

Доказательство. Необходимость. Обозначим через $A^+$ матрицу с элементами $a_{ij}^+ = a_{ij}$, если $a_{ij} > 0$, и $a_{ij}^+ = 0$ в остальных случаях и положим $A^- = A - A^+$.

Пусть $A$ отображает конусный отрезок $\langle -v^0, w^0\rangle$ в себя. Так как сопутствующим для $A$ является оператор

$$\hat{A}(v, w) = A^+ v + A^- w,$$

то необходимо (и достаточно; теорема 3.3, глава III)

$$-A^+ v^0 + A^- w^0 \geqslant -v^0, \qquad A^+ w^0 - A^- v^0 \leqslant w^0, \tag{7.3}$$

или в эквивалентной форме

$$(E - A^+) v^0 + A^- w^0 \geqslant 0, \qquad A^- v^0 + (E - A^+) w^0 \geqslant 0. \tag{7.4}$$

Складывая неравенства (7.4) и производя элементарные преобразования, получаем

$$(E - |A|)(v^0 + w^0) \geqslant 0, \tag{7.5}$$

где через $|A|$ обозначена неотрицательная матрица, элементы которой по модулю равны соответствующим элементам матрицы $A$.

Но (7.5) и является матричной записью условия (7.2), если положить

$$\forall i: \mu_i = v_i^0 + w_i^0.$$

Достаточность. Пусть выполнено (7.2). В матричной записи это означает $(E - |A|) u \geqslant 0$, где $u = \{\mu_1, \ldots, \mu_n\}$. Но тогда неравенства (7.4), а значит, и (7.3) имеют очевидное решение $v^0 = w^0 = u$. Поэтому оператор $A$ отображает конусный отрезок $\langle -u, u\rangle$ в себя.▲

Лемма 7.2. *Для единственности решения системы уравнений (глава* VII, *2.3) необходимо и достаточно, чтобы матрица $E - |A|$ была невырожденна.*

Доказательство. Система уравнений (VII, 2.3) в данном случае имеет вид

$$A^+ v^* + A^- w^* = v^*; \qquad A^- v^* + A^+ w^* = w^*. \tag{7.6}$$

Из (7.6) следует $(E - A)(v^* + w^*) = 0$. В силу невырожденности $E - A$ имеем $v^* = -w^*$, что после подстановки в (7.6) дает

$$(E - |A|) v^* = 0. \tag{7.7}$$

Для того чтобы (7.7) [а значит, и (7.6)] имело лишь нулевое решение, необходима и достаточна невырожденность матрицы $E-|A|$. ▲

Лемма 7.3. *Если матрица $E-|A|$ невырожденна, то условия (7.1) и (7.2) эквивалентны.*

Действительно, пусть $P$ — множество тех индексов $i$, для которых в (7.2) выполняется строгое неравенство. Так как $\{\mu_1, \ldots, \mu_n\} \neq 0$, то непустота $P$ вытекает из невырожденности $E-|A|$. Возьмем теперь любое $j \notin P$ и увеличим $\mu_j$ так, чтобы строгие неравенства (7.2) для $i \in P$ не нарушались (очевидно, это можно сделать). После такой операции индекс $j$ войдет в $P$. Продолжая этот процесс далее, в конце получим $P=I=\{i|i=1, \ldots, n\}$, т. е. для некоторого набора положительных $\mu_1, \ldots, \mu_n$ все неравенства будут строгими, что и означает справедливость (7.1). ▲

Объединяя приведенные леммы и учитывая результаты предыдущей главы, приходим к выводу, что в линейном случае достаточные условия асимптотической устойчивости процедур (2.1) и (4.1), полученные в этой главе, в точности совпадают с соответствующими условиями, обеспечивающими асимптотическую устойчивость гетерогенных систем. Это, пожалуй, вполне закономерно. По-видимому, условие (7.1) не только достаточно, но и необходимо для сходимости (2.1) [но не (4.1)] в линейном случае. Это утверждение в общем виде не доказано и имеет предположительный характер. Однако в ряде интересных частных случаев необходимость (7.1) для сходимости (2.1) легко установить. Это нетрудно сделать, например, для положительно гомогенных систем, когда матрица $A$ неотрицательна. Из теории линейных экономических моделей известно, что (7.1) равносильно продуктивности матрицы $A$, продуктивность же означает неотрицательную обратимость $E-A$, а по теореме Фробениуса — Перрона неотрицательная обратимость $E-A$ эквивалентна требованию $\lambda<1$, где $\lambda$ — наибольшее собственное значение матрицы $A$. Таким образом, (7.1) необходимо для сходимости итерационного процесса $x^{k+1}=Ax^k$, который представляет собой частный случай процедуры (2.1) (при $\Gamma_k \equiv E$). Необходимость (7.1) для сходимости (2.1) легко устанавливается также для отрицательно гомогенных систем и в ряде других случаев.

В заключение рассмотрим следующий простой пример. Пусть

$$A=\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, система отрицательно гомогенна. Оператор $A$ отображает в себя конусный отрезок $\langle \boldsymbol{v}^0, \boldsymbol{w}^0 \rangle$, где, например,

$$\boldsymbol{v}^0 = \{-1, -1, -1\}, \qquad \boldsymbol{w}^0 = \{1, 1, 1\}.$$

В данном случае имеет место (7.2), но матрица $E-|A|$ вырожденна. Другими словами, условие (7.1) не выполняется, процедура (2.1) может не сходиться. В данном случае легко указать конкретную несходящуюся реализацию. Если $\boldsymbol{x}^0 = \boldsymbol{v}^0$ и $\Gamma_k \equiv E$, то последовательность $\boldsymbol{x}^k$ будет такой: $\boldsymbol{v}^0, \boldsymbol{w}^0, \boldsymbol{v}^0, \ldots$.

Любая невырожденная траектория непрерывной процедуры (4.1) в данном случае сходится, поскольку матрица $A-E$ отрицательно определена и симметрична, в силу чего движение (4.1) имеет псевдоградиентный характер (см. главу VIII, § 6).

Глава девятая

# ДИНАМИКА МОДИФИЦИРОВАННЫХ МОДЕЛЕЙ

Довольно часто в действующих системах элементы, как уже отмечалось, имеют информацию лишь о направлениях к своим текущим положениям целей. В этом случае для описания динамики системы естественно использовать процедуру вида (см. главу I, § 3)

$$x_i^{k+1} = x_i^k + \xi_i^k \operatorname{sign}[f_i(\boldsymbol{x}^k) - x_i^k], \tag{0.1}$$

делая те или иные предположения относительно последовательностей $\xi_i^k$. Эквивалентная (0.1) запись

$$x_i^{k+1} = x_i^k + \xi_i^k \operatorname{sign} g_i(\boldsymbol{x}^k) \tag{0.2}$$

подчеркивает, что функции $f_i(\boldsymbol{x})$ элементам системы здесь могут быть действительно не известны.

Далее будут рассмотрены два варианта движения указанного типа. Первый из них близок по идее к предыдущей модели, хотя принципиально и отличается от нее. Он основан на предположении $\xi_i^k > 0$, которое можно интерпретировать как обязательное движение элементов в «нужную» сторону. Во втором варианте предполагается, что $\xi_i^k$ — случайные величины с положительными математическими ожиданиями (т. е. элементы движутся в «нужном» направлении лишь в среднем).

Будут рассмотрены также некоторые другие модификации основной модели и, в частности, коллективное поведение многомерных векторных элементов.

## § 1. Процедуры с демпфированием

Итак, пусть в соответствии с (0.1) [равносильно (0.2)] все элементы системы движутся в «нужную» сторону, т. е. все $\xi_i^k > 0$. Ясно, что без предположения $\xi_i^k \to 0$ при $k \to \infty$ говорить о сходимости (0.1) бессмысленно. Содержательные обоснования этого предположения [о наличии в системе затухания (демпфирования)] в различных ситуациях могут быть разными. В игровых моделях, например, можно ожидать, что элементы после ряда пробных попыток и наблюдения большого разброса собственного выигрыша станут уменьшать величину шагов. Заметим, что отсюда вовсе не следует убывание величин

$$\gamma_i^k = \frac{\xi_i^k}{|f_i(x^k) - x_i^k|}$$

и даже их ограниченность.

Невырожденные траектории (0.1) по аналогии с предшествующей моделью определяются условием

$$\forall i : \sum_k^\infty \xi_i^k = \infty. \qquad (1.1)$$

Понятно, что в предположении (1.1) траектория (0.1) не может сходиться к точке, отличной от равновесной [конечно, если оператор $F(x)$ (или $G(x)$) непрерывен] *.

В тех случаях, когда речь будет идти далее о функционировании системы на некотором ограниченном множестве $\langle v^0, w^0\rangle$, считается, что элемент автоматически выбирает величину шага $\xi_i^k$, не выводящую за пределы ограничений

$$\forall i : x_i \in [v_i^0, w_i^0].$$

Дополнительная «неприятность», которая появляется при изучении процедур типа (0.1), заключается в том, что, несмотря на сходимость, не существует функции $\varphi(x)$, убывающей вдоль любой траектории (0.1). Один из естественных способов преодоления этой трудности — использование следующего вспомогательного утверждения.

Лемма 1.1. *Пусть динамика системы описывается процедурой* (*0.1*) *и существует функция* $\varphi(x) = \rho(x, x)^*$ (*где метрика* $\rho$ *эквивалентна метрике, порождаемой любой нормой в* $R^n$) *такая, что*

$$\forall c > 0, \ \exists \varepsilon_c > 0 \ \forall x \in H_c, \ \xi_i^k < \varepsilon_c : \varphi(x^{k+1}) < \varphi(x^k), \qquad (1.2)$$

где $H_c = \{x \mid \rho(x, x^*) \geqslant c\}$.

*Тогда любая невырожденная траектория* (0.1) *сходится к* $x^*$ *независимо от начального положения* $x^0 \in R^n$ *и* $x^*$ — *устойчивое положение равновесия.*

Содержательно предположение леммы состоит в следующем. Если все шаги достаточно малы ($\forall \xi_i^k \leqslant \varepsilon_c$), то вне шара некото

* Доказательство элементарно. Пусть $x^k \to x^*$ и $G(x^*) \neq 0$. Тогда $\exists i : \operatorname{sign} g_i(x) = \text{const} \neq 0$ для $x$, достаточно близких к $x^*$. Но тогда для данного $i$, начиная с некоторого $k_0$, будет $x_i^{k+1} = x_i^k + \xi_i^k$ (или $x_i^{k+1} = x_i^k - \xi_i^k$) для $k \geqslant k_0$. Отсюда вытекает противоречие между (1.1) и сходимостью $x^k \to x^*$.

рого радиуса $c>0$ (с центром в $x^*$) функция $\varphi(x)$ вдоль траекторий (0.1) строго убывает. При этом для сколь угодно малого $c>0$ можно подобрать соответствующее $\varepsilon_c$. Теперь вывод о сходимости почти очевиден. Так как все $\xi_i^k \to 0$, то после достаточно большого числа итераций все $\xi_i^k$ будут сколь угодно малы, а значит, $\varphi(x)$ будет строго убывать везде за исключением сколь угодно малой окрестности $x^*$... Проведение формального рассуждения предоставляем читателю.

## § 2. Устойчивость при наличии демпфирования

Проиллюстрируем применение леммы 1.1 на простом примере.

Теорема 2.1. *Пусть оператор межэлементных связей $F(x)$ — сжимающий по $m$-норме*. Тогда любая невырожденная траектория процедуры* (0.1) *сходится к* $x^*$ $(x^* = F(x^*))$, *и* $x^*$ *— устойчивое положение равновесия.*

Для доказательства достаточно воспользоваться леммой 1.1, полагая $\varphi(x) = \|x - x^*\|_m$,

$$\xi_i^k < \varepsilon_c = (1-q)c, \tag{2.1}$$

где $q<1$ — коэффициент сжатия.

Проверим, что в этом случае выполняется условие (1.2).

Без ограничения общности можно считать $x^*=0$. Пусть $\|x^k\|_m = R \geqslant c$. Обозначим через $P$ множество тех индексов $i$, для которых

$$|x_i^k| = \max_j |x_j^k| = R.$$

Пусть $i \in P$; тогда $|x_i^{k+1}| < |x_i^k|$ вытекает из (2.1). Пусть теперь $i \notin P$. Рассмотрим два возможных случая: 1) $|x_i^k| \leqslant qR$, тогда независимо от направления шага $|x_i^{k+1}| < R$ в силу (2.1); 2) $qR < |x_i^k| \leqslant R$ — в этом случае (так как оператор $F$ — сжимающий по $m$-норме) $(x_i^{k+1} - x_i^k)x_i^k < 0$, т. е. шаг делается в направлении уменьшения модуля $x_i^k$, и снова (2.1) дает $|x_i^{k+1}| < R$. ▲

Если вникнуть в доказательство теоремы 2.1, то нетрудно понять, что здесь существенно. Ясно, что важно (с точки зрения используемой идеи) наличие у оператора $F$ инвариантных прямоугольных параллелепипедов, вложенных друг в друга и содержащих $x^*$, а также тот факт, что вне окрестности $x^*$ расстояние от границы инвариантного параллелепипеда до ее образа не может быть сколь угодно мало. Предоставляем читателю на этой основе доказать следующие утверждения.

---

* Например, удовлетворяет условию (1.3) в главе VIII.

Теорема 2.2. *Пусть система функционирует на некотором компакте* $\langle \boldsymbol{v}^0, \boldsymbol{w}^0 \rangle$ *и выполняются условия* (VIII.1.4) [*или равносильно* (VIII.1.9)]. *Тогда положение равновесия* $\boldsymbol{x}^*$ *глобально устойчиво* [*относительно* (0.1)] *на* $\langle \boldsymbol{v}^0, \boldsymbol{w}^0 \rangle$. ▲

Теорема 2.3. *Пусть система функционирует на некотором компакте* $\langle \boldsymbol{v}^0, \boldsymbol{w}^0 \rangle$ *и конусный отрезок* $\langle \boldsymbol{v}^0, \boldsymbol{w}^0 \rangle$ *сильно инвариантен для гетерогенного оператора* $F$, *причем система уравнений* (VII.2.3) *имеет единственное решение. Тогда положение равновесия* $\boldsymbol{x}^*$ (*которое заведомо существует*) *глобально устойчиво* [*относительно* (0.1)] *на* $\langle \boldsymbol{v}^0, \boldsymbol{w}^0 \rangle$. ▲

По первому впечатлению обычно кажется, что процедура (0.1) по сравнению с (I.1.4) — существенно более общая [так как в отличие от (I.1.4) в системе допускается «перерегулирование»]. На самом деле это не совсем так. Если процедура (I.1.4) не сходится, то шаги в этом случае не обязаны стремиться к нулю, тогда как (0.1) предполагает наличие «принудительного» затухания в системе независимо от сходимости. Поэтому (0.1) может сходиться, когда (I.1.4) не сходится. Интуитивно естественным представляется, что условия сходимости (0.1) близки к условиям сходимости непрерывного процесса $\dot{\boldsymbol{x}} = \Gamma(t)\, G(\boldsymbol{x})$. Есть несколько способов показать эту близость. Остановимся на одном из них.

Заменим исходное предположение: все $\xi_i^k > 0$, которое, кстати, можно записать в форме

$$\xi^k = \{\xi_1^k, \ \ldots, \ \xi_n^k\} \in \operatorname{int} R_+^n, \tag{2.2}$$

более жестким: $\xi^k \in K$, где $K \subset \operatorname{int} R_+^n$ — некоторый конус, и будем в этом случае траектории (0.1) называть удовлетворяющими $K$-условию. Понятно, что, выбирая конус $K$ «достаточно объемным», можно сколь угодно мало отступать от исходного предположения (2.2).

Теорема 2.4. *Пусть на компакте* $\langle \boldsymbol{v}^0, \boldsymbol{w}^0 \rangle$ *существует* (*достаточно гладкая*) *функция* $V(\boldsymbol{x}^*)$ [$V(\boldsymbol{x}^*) = 0$, $V(\boldsymbol{x}) \neq 0$ *при* $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{x}^*$], *строго убывающая вдоль любой невырожденной траектории процесса*

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \Gamma(t)\, G(\boldsymbol{x}); \tag{2.3}$$

*тогда любая невырожденная траектория* (0.1), *удовлетворяющая* $K$-*условию, сходится к* $\boldsymbol{x}^*$.

Действительно, в силу (0.2).

$$V(\boldsymbol{x}^{k+1}) = V(\boldsymbol{x}^k) + (\operatorname{grad} V(\boldsymbol{x}^k), \operatorname{diag}(\xi^k) \operatorname{Sign} G(\boldsymbol{x}^k)) + o(\|\xi^k\|). \tag{2.4}$$

Второе слагаемое в (2.4) отрицательно. Кроме того, вне любой *фиксированной окрестности* $\boldsymbol{x}^*$ (где $\operatorname{grad} V(\boldsymbol{x}) \neq 0$, причем $\inf \|\operatorname{grad} V(\boldsymbol{x})\| > 0$) это слагаемое имеет порядок $\|\xi^k\|$ (условие

$\xi^k \in K$ при этом существенно), поэтому $V(x^{k+1}) < V(x^k)$, как только норма $\xi^k$ достаточно мала (а $\|x^k - x^*\| \geqslant c > 0$). Далее остается применить лемму 1.1. ▲

Рассмотрим теперь процедуру (0.2) в случае линейного оператора $G(x) = Ax$, где $A$ — симметричная отрицательно определенная матрица [непрерывный процесс $\dot{x} = \Gamma(t)Ax$ при этом сходится, см. § 6 в главе VII)]. Если рассматривать невырожденные траектории (0.2), удовлетворяющие $K$-условию, то вопрос о сходимости (0.2) в данном случае положительно решается предыдущей теоремой. Заменим $K$-условие другим требованием. Будем предполагать, что

$$\forall i : \sum_k^{\infty} (\xi_i^k)^2 < 0, \tag{2.5}$$

т. е. последовательности $\xi_i^k$ стремятся к нулю достаточно быстро, но не слишком [так как «ограничение снизу» (1.1) остается].

Пусть $D_k = \operatorname{diag}(\xi_1^k, \ldots, \xi_n^k)$. Очевидно, в силу (0.2)

$$(Ax^{k+1}, x^{k+1}) = (Ax^k, x^k) + 2(Ax^k, D_k \operatorname{Sign} Ax^k) + \\ + (AD_k \operatorname{Sign} Ax^k, D_k \operatorname{Sign} Ax^k), \tag{2.6}$$

поэтому

$$(Ax^{k+1}, x^{k+1}) > (Ax^k, x^k) + (AD_k \operatorname{Sign} Ax^k, D_k \operatorname{Sign} Ax^k). \tag{2.7}$$

Рассмотрим последовательность

$$\alpha_k = (Ax^k, x^k) + \sum_{j=k}^{\infty} (AD_k \operatorname{Sign} Ax^k, D_k \operatorname{Sign} Ax^k)$$

[корректность определения $\alpha_k$ следует из (2.5)].

Из (2.7) вытекает $\alpha_{k+1} > \alpha_k$, т. е. величины $\alpha_k$ возрастают с ростом $k$, причём в силу (2.5) $\alpha_k$ ограничены. Поэтому последовательность $\alpha_k$ имеет предел, а значит, предел имеет и последовательность $(Ax^k, x^k)$. Покажем, что $x^k \to 0$.

Просуммируем (2.6) по $k$ от $k=0$ до $k=N>0$:

$$(Ax^{N+1}, x^{N+1}) = (Ax^0, x^0) + 2\sum_{k=0}^{N} (Ax^k, D_k \operatorname{Sign} Ax^k) + \\ + \sum_{k=0}^{N} (AD_k \operatorname{Sign} Ax^k, D_k \operatorname{Sign} Ax^k).$$

Отсюда с необходимостью вытекает, что ряд

$$\sum_k^{\infty} (Ax^k, D_k \operatorname{Sign} Ax^k) \tag{2.8}$$

сходится. Но так как сходится последовательность $(Ax^k, x^k)$ и имеет место (1.1), сходимость ряда (2.8) возможна лишь в случае $x^k \to 0$, что и требовалось доказать. ▲

## § 3. Сходимость вероятностных процессов

Если $\xi_i^k$ в (0.1) — случайные величины, то порождаемый (0.1) процесс $x^k$ также случаен. При этом о сходимости (0.1) естественно говорить в некотором вероятностном смысле.

Заметим, что о сходимости вероятностного процесса можно говорить и в обычном смысле (если мы имеем возможность доказать сходимость всех реализаций, а не только некоторого большинства). Рассмотрим, к примеру, итерационную процедуру (I.1.4), в которой все $\gamma_i^k$ — случайные величины, принимающие значения из сегмента $[\varepsilon, 1]$ $(\varepsilon > 0)$. В этом случае порождаемый процедурой (I.1.4) процесс $x^k$ — случайный, причем из результатов предыдущих глав в определенных предположениях следует сходимость всех его реализаций. Однако ясно, что при подобных обстоятельствах рассматривать процесс $x^k$ как случайный бесполезно. Лучше просто говорить о множестве реализаций (что мы и делали), не затемняя существа дела посторонними, в данном случае вероятностными, деталями.

Вероятностные представления оказываются полезными в несколько иной ситуации. Допустим, что межэлементные связи в системе таковы, что сходимость (I.1.4) или (0.1) не имеет места (или мы не в состоянии ее доказать). При этом может оказаться, что подавляющее большинство траекторий изучаемой процедуры все же сходится, и по содержательному смыслу задачи такое положение естественно признать удовлетворительным. Действительно, подобное сужение множества изучаемых реализаций мы несколько раз производили (вместо $\gamma_i^k \geqslant 0$ предполагали $\gamma_i^k > 0$; в предыдущем параграфе вместо $\xi^k \in \operatorname{int} R_+^n$ вводили предположение $\xi^k \in K \subset \operatorname{int} R_+^n$). Но не всегда такими простыми средствами удается отсечь от множества всех реализаций подмножество нежелательных, несходящихся или тех, сходимость которых мы не умеем доказывать. Нетривиальные способы такого отсечения предоставляет как раз вероятностная трактовка сходимости, позволяющая утверждать, что множество несходящихся реализаций весьма мало (в том или ином смысле) по сравнению с множеством всех реализаций *.

* Понятно, что вывод о малости множества несходящихся траекторий может быть часто признан удовлетворительным даже в тех случаях, когда вероятностная природа протекающих в системе процессов сомнительна. Так, например, в игровых моделях вероятностные модели поведения элементов можно признать удовлетворительными (хотя это — вопрос веры), если имеется уверенность в том, что действия элементов несогласованны.

В этом параграфе мы приведем несколько определений и элементарных фактов, касающихся сходимости вероятностных процессов вообще, а к интересующим нас процедурам вернемся в следующем параграфе. Предполагая у читателя знакомство с элементами теории вероятностей, мы в дальнейшем допускаем некоторые вольности в обозначениях и упрощения в трактовке ряда результатов.

Говорят, что последовательность случайных величин $\alpha_1, \ldots$ $\ldots, \alpha_k, \ldots$ *сходится по вероятности к случайной величине* $\alpha$, и пишут

$$\alpha_k \xrightarrow{p} \alpha,$$

если для любых $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ можно указать $N$ такое, что для всех $k > N$ вероятность события $\{|\alpha_k - \alpha| \geqslant \varepsilon\}$ меньше $\delta$, т. е. при любом $\varepsilon > 0$

$$\lim_{k\to\infty} \Pr\{|\alpha_k - \alpha| < \varepsilon\} = 1.$$

Вообще говоря, если исходить из приведенных выше соображений по поводу малости множества несходящихся траекторий, то понятие сходимости по вероятности нужно признать негодным для этой цели. Дело в том, что процесс $\alpha_k$ может сходиться к детерминированной величине $\alpha$ по вероятности, в то время как ни одна конкретная реализация $\alpha_k$ не сходится к $\alpha$ в обычном смысле. Правда, для этого нужно чтобы последовательность $\alpha_k$ имела достаточно специальную (вычурную) структуру. Интересующие же нас процессы являются марковскими, в которых условная плотность распределения $\alpha_k$ зависит лишь от реализации $\alpha_{k-1}$. В этом случае понятие сходимости по вероятности удовлетворительно и с точки зрения малости множества несходящихся реализаций.

Тем не менее в большей степени для нашей цели подходит более сильное понятие сходимости с вероятностью единица.

Говорят, что последовательность случайных величин $\alpha_k$ *сходится с вероятностью единица* (*или почти наверное*) *к случайной величине* $\alpha$, и пишут

$$\alpha_k \xrightarrow{\text{п.н.}} \alpha,$$

если для любых $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ можно указать такое $N$, что вероятность события $\{|\alpha_k - \alpha| \geqslant \varepsilon$ хотя бы для одного $k > N\}$ меньше $\delta$. Другими словами, $\alpha_k \xrightarrow{\text{п.н.}} \alpha$, если

$$\lim_{k\to\infty} \Pr \bigcap_{j\geqslant k}^{\infty} \{|\alpha_k - \alpha| < \varepsilon\} = 1.$$

Таким образом, если $\alpha$ — детерминированная величина и $\alpha_k \xrightarrow{\text{п.н.}} \alpha$, то множество несходящихся траекторий действительно «мало» (его мера равна нулю), вероятность несходящейся к $\alpha$ (в обычном смысле) реализации равна нулю.

Импликация $\alpha_k \xrightarrow{\text{п.н.}} \alpha \Rightarrow \alpha_k \xrightarrow{p} \alpha$ очевидна.

Важную роль при изучении сходимости вероятностных процессов играет понятие *полумартингала*.

Последовательность случайных величин $\alpha_k$ назовем *полумартингалом*, если математическое ожидание $M\{\alpha_k\}$ существует при любом $k$ и

$$M\{\alpha_{k+1} | \alpha_1, \ldots, \alpha_k|\} \leqslant \alpha_k.$$

Мы будем использовать далее следующий результат.

Теорема 3.1. *Пусть $\alpha_k$ — полумартингал и*

$$\sup_k M\{|\alpha_k|\} < \infty; \tag{3.1}$$

*тогда*

$$\alpha_k \xrightarrow{\text{п.н.}} \alpha,$$

*где $\alpha$ — некоторая случайная величина, причем $M\{|\alpha|\} < \infty$.* ▲

Условие (3.1) автоматически выполняется для неотрицательных полумартингалов. Поэтому можно сказать, что всякий неотрицательный полумартингал сходится почти наверное к некоторой случайной величине.

Нас, конечно, будут интересовать случаи, когда эта случайная величина — детерминированная, т. е. когда ее плотность распределения — $\delta$-функция. Инструментом для установления подобных фактов будет служить приводимое ниже утверждение.

Теорема 3.2. *Пусть $\alpha_k$ — неотрицательный полумартингал, а $\sum\limits_k^\infty \gamma_k$ (все $\gamma_k \geqslant 0$) — некоторый расходящийся ряд; тогда из сходимости ряда*

$$\sum_k^\infty \gamma_k M\{\alpha_k\}$$

*вытекает существование подпоследовательности $k_p$, по которой*

$$\alpha_{k_p} \xrightarrow{\text{п.н.}} 0. \ ▲$$

## § 4. Стохастический вариант модели

Итак, вернемся к рассмотрению итерационной процедуры (0.1), предполагая теперь, что $\xi_i^k$ — случайные величины, которые могут принимать даже отрицательные значения, но их математические ожидания $M\{\xi_i^k\} = m_i^k$ строго положительны (т. е. в среднем элементы все же движутся в «нужном» направлении).

Аналогом требования $\xi_i^k \to 0$ здесь будет

$$\forall i: \lim_{k\to\infty} m_i^k = 0,$$

а вместо предположения типа (1.1) мы будем использовать более сильное

$$\sum_k^{\infty} \min_i m_i^k = \infty.$$

Наконец, будем предполагать

$$\forall i: \sum_k^{\infty} M\{(\xi_i^k)^2\} < \infty.$$

Теорема 4.1. *Пусть на компакте* $\langle \boldsymbol{v}^0, \boldsymbol{w}^0 \rangle$ *существует (достаточно гладкая) функция* $V(\boldsymbol{x})$ $(V(\boldsymbol{x}^*) = 0,\ V(\boldsymbol{x}) > 0$ *при* $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{x}^*)$, *строго убывающая вдоль любой невырожденной траектории процесса* $\dot{\boldsymbol{x}} = \Gamma(t)\, G(\boldsymbol{x})$; *тогда случайный процесс* (0.1) *при указанных выше предположениях сходится к* $\boldsymbol{x}^*$ *с вероятностью единица.*

Доказательство. Обозначим:

$$D_k = \operatorname{diag}\{\xi_1^k, \ldots, \xi_n^k\};$$

$$M_k = \operatorname{diag}\{m_1^k, \ldots, m_n^k\};$$

$$C_k = \operatorname{diag}\{M[(\xi_1^k)^2], \ldots, M[(\xi_n^k)^2]\}.$$

Очевидно, последовательность значений $V(\boldsymbol{x}^k)$ на траекториях (0.1) (равносильно (0.2)) удовлетворяет неравенствам

$$V(\boldsymbol{x}^{k+1}) = V(\boldsymbol{x}^k + D_k \operatorname{Sign} G(\boldsymbol{x}^k)) \leqslant V(\boldsymbol{x}^k) + \\ + (\operatorname{grad} V(\boldsymbol{x}^k), D_k \operatorname{Sign} G(\boldsymbol{x}^k)) + \boldsymbol{g} D_k^2 \boldsymbol{h},$$

где $\boldsymbol{g}$ и $\boldsymbol{h}$ — некоторые ограниченные векторы. Отсюда

$$M\{V(\boldsymbol{x}^{k+1})/\boldsymbol{x}^0, \ldots, \boldsymbol{x}^k\} \leqslant V(\boldsymbol{x}^k) + \boldsymbol{g} C_k \boldsymbol{h} + (\operatorname{grad} V(\boldsymbol{x}^k), M_k \operatorname{Sign} G(\boldsymbol{x}^k)), \tag{4.1}$$

что дает

$$M\{V(\boldsymbol{x}^{k+1})/\boldsymbol{x}^0, \ldots, \boldsymbol{x}^k\} \leqslant V(\boldsymbol{x}^k) + \boldsymbol{g} C_k \boldsymbol{h}. \tag{4.2}$$

Производя в (4.2) замену

$$\alpha_k = V(\boldsymbol{x}^k) + \sum_{j=k}^{\infty} \boldsymbol{g}\, C_j \boldsymbol{h},$$

приходим к неравенствам

$$M\{\alpha_{k+1}/\alpha_0, \ldots, \alpha_k\} \leqslant \alpha_k.$$

Следовательно, $\alpha_k$ — полумартингал. Условие (3.1) выполнено заведомо, поэтому $\alpha_k \xrightarrow{\text{п.н.}} \alpha$ (где $\alpha$ — некоторая случайная величина), а значит, и $V(x^k)$ сходится почти наверное к некоторой случайной величине $\chi$.

Покажем, что $\Pr\{\chi=0\}=1$, т. е. $x^k \xrightarrow{\text{п.н.}} x^*$. Возьмем математическое ожидание (4.1) по всем $x^0, \ldots, x^k$ и просуммируем от 1 до $N$:

$$M\{V(x^{N+1})\} \leqslant M\{V(x^0)\} + g\sum_{k=0}^{N} C_k h +$$

$$+\sum_{k=0}^{N} M\{(\operatorname{grad} V(x^k),\ M_k \operatorname{Sign} G(x^k)\}.$$

Отсюда очевидно, что ряд

$$\sum_{k}^{\infty} M\{(\operatorname{grad} V(x^k), M_k \operatorname{Sign} G(x^k))\}$$

сходится. Но тогда, используя теорему 3.2 и предположения доказываемой теоремы, нетрудно показать, что существует подпоследовательность $k_p$, по которой $\operatorname{grad} V(x^{k_p}) \xrightarrow{\text{п.н.}} 0$. В конечном итоге это дает $x^k \xrightarrow{\text{п.н.}} x^*$. ▲

Легко видеть, что доказательство можно переделать (ничего не меняя по существу) для полудифференцируемого функционала $V(x)$, охватывая при этом важный частный случай $V(x) = \|x - x^*\|$.

## § 5. Системы с векторными элементами

Что считать элементом системы, т. е. что принимать за элементарные кирпичики (образующие систему), — в известной степени относительно. Дело в том, что вопрос о «локализации» элементов возникает обычно на этапе моделирования, при этом существующее в реальной системе, например, административное деление на части может вовсе не отражаться в математической модели (так как цель исследования может быть не связана с административной структурой системы). Так, например, в упоминавшейся уже (в главе I) модели рынка, на котором продавцы торгуют сразу несколькими товарами, элементами системы естественно считать фиктивных «скалярных продавцов», каждый из которых торгует единственным товаром. Такая точка зрения оправдана в том случае, когда целью нашего исследования является выяснение устойчивости рыночного равновесия, и у нас имеются основания полагать, что каждый «векторный» продавец производит независимую регулировку цен по наблюдению (скалярных) избыточных спросов [т. е. действует так же, как и группа самостоятельных (скалярных) продавцов].

Описанная ситуация типична для большинства задач коллективного поведения. Наблюдаемы в системе, как правило,— скалярные функции-индикаторы, и часто оказывается безразличным, распоряжается ли каждый элемент единственной переменной или группой переменных. По этой причине результаты предшествующих глав по устойчивости функционирования систем, состоящих из скалярных элементов, могут применяться к изучению систем, в которых элементы распоряжаются целыми наборами переменных. Более того, попытки учесть возможность согласования собственных действий векторными элементами часто представляются явно нецелесообразными. Тем не менее вопрос обнаружения эффектов, являющихся следствием такого согласования, заслуживает внимания.

Рассмотрим систему, состоящую из векторных элементов $A_i$ (векторных в том смысле, что в распоряжении $A_i$ теперь имеется не скаляр $x_i$, а некоторый вектор $\boldsymbol{x}_i=\{x_{i1}, \ldots, x_{in_i}\}$). Векторный элемент $A_i$ будем считать совокупностью скалярных элементов $\{A_{ij}\}$ (которые, вообще говоря, могут согласовывать свои действия) таких, что каждый $A_{ij}$ распоряжается выбором скалярной величины $x_{ij}$.

Если элементы $A_i$ производят независимую регулировку параметров (т. е. не координируют свои действия), то это можно записать, например, так:

$$x_{ij}^{k+1}=x_{ij}^k+\gamma_{ij}^k[f_{ij}(\boldsymbol{x}^k)-x_{ij}^k], \tag{5.1}$$

где $f_{ij}(\cdot)$—компоненты оператора межэлементных связей $F(\boldsymbol{x})=\{f_{i1}(\boldsymbol{x}), \ldots, f_{nn_i}(\boldsymbol{x})\}$, все $\gamma_{ij}^k\in[0, 1]$.

Процедура (5.1) — не что иное, как обычная для нас процедура (I.1.4), записанная лишь в других обозначениях.

Если же элементы $A_i$ движутся по направлению к своим векторным текущим положениям цели $F_i(\boldsymbol{x})$, то аналогом (5.1) будет

$$\boldsymbol{x}_i^{k+1}=\boldsymbol{x}_i^k+\gamma_i^k[F_i(\boldsymbol{x}^k)-\boldsymbol{x}_i^k]. \tag{5.2}$$

По форме записи это совпадает с (I.1.4), но здесь $\boldsymbol{x}_i^k$ —векторные величины.

Если для $A_i$ наблюдаемы функции $f_{ij}(\boldsymbol{x})$, то векторное текущее положение цели $\hat{\boldsymbol{x}}_i=F_i(\boldsymbol{x})$ естественно определяется как решение системы уравнений

$$\hat{x}_{ij}=f_{ij}(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_{i-1}, \hat{\boldsymbol{x}}_i, \boldsymbol{x}_{i+1}, \ldots, \boldsymbol{x}_n), \tag{5.3}$$
$$j=1, \ldots, n_i,$$

причем понятно, что $F_i(\boldsymbol{x})$ не зависит явно от $\boldsymbol{x}_i$.

Пусть для векторов $x_i$ имеется некоторое отношение полуупорядоченности $\overset{i}{\succ}$, обладающее всеми «хорошими» свойствами (например, каждое $R^{n_i}$ полуупорядочено некоторым ортантом). Пусть $\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{y}$ означает, что $\forall i : \boldsymbol{x}_i \overset{i}{\succ} \boldsymbol{y}_i$. Теперь по аналогии со скалярным случаем можно определить (ничего не меняя по форме) гетеротонные системы с векторными элементами. После этого можно установить ряд результатов по устойчивости таких систем, используя прежние схемы доказательств (см. главу VII). Мы не останавливаемся на этих результатах, так как их формулировка дословно повторяет теоремы главы VII *.

Обратим внимание, что в общем случае сходимость (5.2) не влечет за собой сходимость (5.1), и наоборот, из сходимости (5.1) не следует сходимость (5.2). Это становится очевидным из рассмотрения следующего простого примера. Пусть $A_1$ распоряжается выбором двух переменных $x_{11}$ и $x_{12}$. На рис. 6 изображены функции $f_{11}(\boldsymbol{x})$ и $f_{12}(\boldsymbol{x})$ при некотором фиксированном наборе переменных $\boldsymbol{x}_2^k, \ldots, \boldsymbol{x}_n^k$, т. е. чертеж изображает некоторое двумерное сечение. Точка пересечения графиков функций $f_{11}(\boldsymbol{x})$ и $f_{12}(\boldsymbol{x})$ дает векторное текущее положение цели $F_1(\boldsymbol{x}^k)$. Из точки $\boldsymbol{x}_1^k$ в соответствии с (5.1) элемент $A_1$ может попасть в любую точку заштрихованного прямоугольника. В соответствии же с (5.2) элемент $A_1$ обязан двигаться вдоль отрезка, соединяющего точки $\boldsymbol{x}_1^k$ и $F_1(\boldsymbol{x}^k)$. В изображенной на рис. 6 ситуации направление дви-

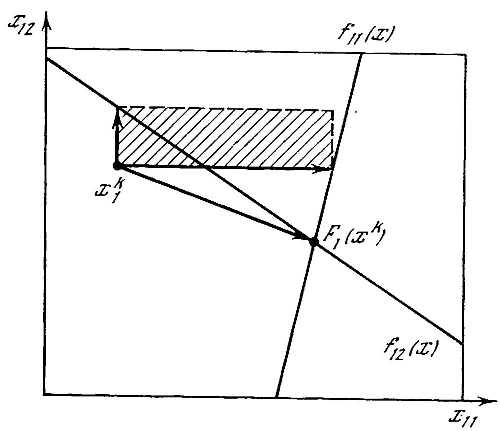



Рис. 6

жения в последнем случае не совпадает ни с одним направлением движения, удовлетворяющим (5.1). Это и указывает на упомянутую выше независимость между сходимостями (5.1) и (5.2).

---

* С решением интересной серии вопросов связана попытка выделения среди систем с векторными элементами систем с ограниченным межэлементным взаимодействием. Эта задача подробно не изучалась,

В случае, когда у нас нет информации о том, каким правилом [(5.1) или (5.2)] руководствуются элементы, желательно располагать возможностью гарантировать сходимость и той и другой процедуры одновременно*. Так как и в том и в другом случае мы располагаем соответствующими теоремами о сходимости для гетеротонных систем, представляет интерес выяснение условий, при которых гетеротонными будут как исходная (агрегированная) система с векторными элементами $A_i$, так и дезагрегированная система (со скалярными элементами $A_{ij}$). Как мы уже отмечали, из исходных предпосылок обычно вытекает гетерогенность дезагрегированной (скалярной) системы. К сожалению, свойство гетерогенности может теряться при агрегировании скалярных элементов в группы, т. е. при переходе от процедуры (5.1) к (5.2). В важном частном случае положительно гомогенных систем свойство положительной гомогенности системы сохраняется при агрегировании (в некоторых дополнительных предположениях). Покажем, что это действительно так.

Пусть положительно гомогенная система состоит из элементов $\{A_{ij}\}$ и элементы $A_{ij}$ с общим первым индексом объединяются в группы $A_i$. Будем предполагать, что система функционирует на конусном отрезке $\langle \boldsymbol{v}^0, \boldsymbol{w}^0 \rangle$, функции $f_{ij}(\boldsymbol{x})$ непрерывны и при любом допустимом наборе

$$\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_{i-1}, \boldsymbol{x}_{i+1}, \ldots, \boldsymbol{x}_n \tag{5.4}$$

система уравнений (5.3) имеет единственное решение. Последнее предположение будем называть условием $A$, остальные же предположения считать выполненными без специального о них упоминания.

Так как исходная система положительно гомогенна, то при любом фиксированном наборе (5.4) значение $F_i(\boldsymbol{x})$ можно определить как предел последовательных итераций

$$x_{ij}^{k+1} = f_{ij}(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_{i-1}, \boldsymbol{x}_i^k, \boldsymbol{x}_{i+1}, \ldots, \boldsymbol{x}_n), \quad j = 1, \ldots, n_i, \tag{5.5}$$

где, например, $x_{ij}^0 = v_{ij}^0$. Сходимость (5.5) вытекает из результатов § 1 главы VII.

Если $\hat{x}_i(\boldsymbol{x})$ — предел (5.5), а $\hat{x}_i(\boldsymbol{y})$ — предел однотипной процедуры

$$x_{ij}^{k+1} = f_{ij}(\boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_{i-1}, \boldsymbol{x}_i^k, \boldsymbol{y}_{i+1}, \ldots, \boldsymbol{y}_n),$$

причем $\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{y}$, то из положительной гомогенности дезагрегирован-

* Постановку задачи можно разнообразить, считая, например, что часть элементов руководствуется правилом (5.1), а остальные — (5.2). Можно также считать, что элементы время от времени меняют тактику поведения, переходя от способа действий (5.1) к (5.2) и наоборот.

ной системы, очевидно, следует $\hat{x}_i(x) \geqslant \hat{x}_i(y)$, т. е. $F_i(x) \geqslant F_i(y)$. Таким образом, мы приходим к следующему результату.

Теорема 5.1. *Если справедливо условие А, то любой способ агрегирования скалярных элементов положительно гомогенной системы в группы дает в результате положительно гомогенную систему с векторными элементами.* ▲

Итак, в предположениях теоремы 5.1 можно гарантировать сходимость как процедуры (5.1), так и (5.2).

Заметим, что условие $A$ автоматически выполняется, если оператор межэлементных связей положительно гомогенной системы вогнут.

## Глава десятая

# МЕТАИГРОВОЙ СИНТЕЗ

В этой главе некоторые из предшествующих результатов применяются к анализу устойчивости игровых моделей экономики. Так как рассматриваемый далее тип игровых моделей стал изучаться сравнительно недавно, их содержательная экономическая сторона излагается достаточно подробно. При этом в поле зрения попадает весь комплекс задач, требующих своего решения, начиная от нормативной задачи синтеза наилучших схем организации работы системы и кончая дескриптивным анализом устойчивости. Изложение ведется на простых примерах.

### § 1. Задача распределения ресурса

Рассмотрим двухуровневую систему (рис. 7), состоящую из центрального органа (ЦО) и подчиненных ему $n$ элементов $A_i$. Пусть время функционирования системы разбито на плановые периоды с номерами $k=0, 1, \ldots$ В каждом плановом периоде ЦО располагает запасом ресурса (сырья) определенного вида

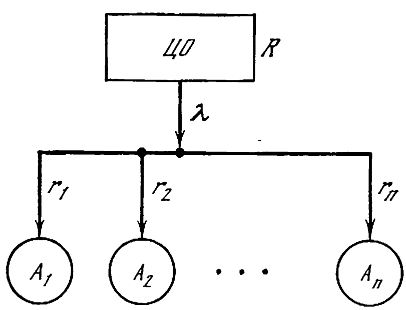



**Рис. 7**

в количестве $R$. Через $r_i$ будем обозначать количество ресурса, выдаваемое элементу $A_i$. Каждый элемент $A_i$ характеризуется своей производственной функцией $\varphi_i(r_i)$, т. е., получая ресурс в количестве $r_i$, элемент $A_i$ производит некоторую полезную продукцию в количестве $y_i=\varphi_i(r_i)$. Сразу договоримся, что все функции $\varphi_i(\cdot)$ определяют количество выходной продукции в некотором едином выражении (например, денежном). Наконец, для простоты зададимся пока видом функций $\varphi_i(r_i)$, считая $\varphi_i(r_i) = \alpha_i\sqrt{r_i}$ $(\alpha_i > 0)$. Это соответствует обычным экономическим представлениям о монотонности возрастания производственной функции и ее вогнутости (связанной с насыщением). Коэффициенты $\alpha_i$ будем называть коэффициентами эффективности производства.

Естественной задачей центра здесь является следующая задача на условный экстремум:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \sqrt{r_i} \to \max_{r_1,\ldots,r_n}; \qquad \sum_{i=1}^{n} r_i = R, \tag{1.1}$$

т. е. такое распределение ресурса, при котором суммарное количество полезного продукта, производимого системой, максимально. (Заметим, что в силу монотонности возрастания функций $\alpha_i\sqrt{r_i}$ ограничения $\sum_i r_i = R$ и $\sum_i r_i \leqslant R$ здесь эквивалентны.)

Задача (1.1), конечно, тривиальна. Она становится нетривиальной, если учесть следующее. На верхнем уровне, как правило, отсутствует точная информация об элементах нижнего уровня. В данном случае это сводится к отсутствию у ЦО достоверной информации о коэффициентах эффективности $\alpha_i$. По этой причине ЦО не имеет возможности решить задачу (1.1), и ясно, что для успешного распределения ресурса ему необходимо организовать сбор данных (информации). Эта проблема порождает новый круг нетривиальных вопросов, в первую очередь заставляя задуматься о наличии интересов у элементов нижнего уровня.

Об интересах элементов нижнего уровня, пожалуй, стоило вспомнить и раньше, когда речь шла о производственных функциях. Действительно, функция $\alpha_i\sqrt{r_i}$ скорее отражает предельные возможности элемента, нежели жесткую связь между его входом и выходом. Если элемент $A_i$ не заинтересован в результатах своего труда, то он, получая ресурс в любом количестве $r_i$, может вообще не работать, давая на выходе $y_i = 0$, или же может работать ниже своих предельных возможностей, давая выходной продукт в количестве $y_i < \alpha_i\sqrt{r_i}$.

Отсюда ясно, что центру заведомо необходимо заинтересовать элементы в результатах своего труда, например, платить элементам пропорционально производимой ими полезной продукции, т. е. сделать выигрыш элементов $A_i$ равным $D_i = \beta\alpha_i\sqrt{r_i}$ (коэффициент пропорциональности $\beta$ будем считать равным единице; это не меняет последующих выводов).

Пусть, действительно, функции выигрыша элементов равны $D_i = \alpha_i\sqrt{r_i}$ и каждый $A_i$ стремится к максимизации своего выигрыша. Допустим, что при этом ЦО организует работу системы следующим образом. В каждом $k$-м периоде запрашивает элементы о величинах коэффициентов $\alpha_i$, после чего каждый элемент $A_i$ сообщает: «$x_i^k$». Затем ЦО подставляет в (1.1) вместо неизвестных $\alpha_i$ величины $x_i^k$ и решает на основе этой информации задачу оптимального распределения ресурса. Легко подсчитать, что решением будет

$$r_i^k = \frac{(x_i^k)^2}{\sum_j (x_j^k)^2} R; \tag{1.2}$$

поэтому кто сообщит бóльшую величину $x_i^k$, тот получит наибольшее количество ресурса, а значит, и наибольший выигрыш, так как $D_i = \alpha_i \sqrt{r_i}$ монотонно возрастает по $r_i$

Нетрудно предсказать, что с такой системой произойдет: элементы будут сообщать все бóльшие и бóльшие величины $x_i^k$, и система пойдет «вразнос».

Здесь бросаются в глаза две серьезные причины плохой организации работы системы:

1) каждая функция $D_i$ монотонно возрастает по $r_i$; поэтому все элементы стремятся получить сырья как можно больше;

2) элементы никак не наказываются за обман.

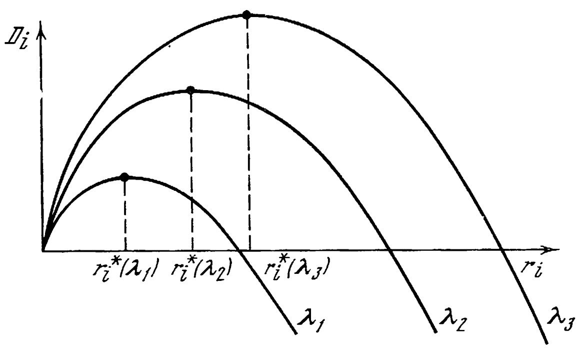



**Рис. 8**

Для борьбы с первым источником неприятностей в незапамятные времена был изобретен механизм цен. Функции выигрыша элементов делаются равными

$$D_i = \alpha_i \sqrt{r_i} - \lambda r_i, \tag{1.3}$$

где $\lambda$ — цена на ресурс. Таким образом, $\alpha_i \sqrt{r_i}$ — теперь доход элемента; $\lambda r_i$ — деньги, уплаченные за сырье; $\alpha_i \sqrt{r_i} - \lambda r_i$ — прибыль. Функции выигрыша (1.3) имеют вид, изображенный на рис. 8 (разные кривые соответствуют разным ценам), и теперь каждая функция (1.3) достигает максимума в некоторой точке $r_i^*$, т. е. для каждого элемента существует оптимальное количество получаемого сырья. Обратим внимание, что $r_i^*$, очевидно, зависят от $\lambda$, причем функции $r_i^*(\lambda)$ монотонно убывают по $\lambda$ (чем цена больше, тем оптимальный объем закупки сырья меньше).

Проанализируем работу системы с функциями выигрыша (1.3), предполагая, что в остальном она функционирует по-старому: в каждый период ЦО производит опрос элементов нижнего уровня, а затем делит ресурс по правилу (1.2).

Для удобства анализа положим $R=1$, и величину $(x_i^k)^2$ будем называть запросом на ресурс. В этом случае правило (1.2) — не что иное, как деление ресурса пропорционально запросам.

В зависимости от того, какая фиксирована цена, возможны три варианта:

I. $\sum\limits_i r_i^* > 1$ (*дефицит ресурса*);

II. $\sum\limits_i r_i^* < 1$ (*избыток ресурса*);

III. $\sum\limits_i r_i^* = 1$.

В случае дефицита ресурса все элементы в сумме хотят больше, чем имеется в наличии. Поэтому как бы ни делил центр ресурс, кто-то получит меньше желаемого количества, и естественно в следующем периоде увеличит свой запрос. В следующем периоде меньше ресурса, чем «надо», получит, возможно, кто-нибудь другой, и он станет впоследствии увеличивать запрос. Таким образом, при наличии дефицита ресурса запросы растут до бесконечности (или до некоторого установленного сверху предела) и система снова идет «вразнос» (или же выходит на некоторый предел запросов, что влечет за собой распределение ресурса при отсутствии достоверной информации).

Случай избытка ресурса анализируется аналогично, и ясно, что картина будет столь же неприглядной (элементы будут занижать запросы).

Наконец, третий вариант представляется благоприятным. Все элементы в сумме хотят ровно столько, сколько имеется в наличии. Сколько надо, столько они и просят, столько же дает им центр, и легко проверить, что это и есть оптимальное решение задачи (1.1).

Этот последний вариант служит простым примером реализации популярной экономической идеи равновесных цен (понятно, что равенство III — следствие выбора подходящей цены). Посмотрим, чем этот вариант плох.

Мы привыкли обычно иметь дело с корректными задачами. Корректными в том смысле, что малые изменения в начальных данных влекут за собой малые изменения в ответе и вообще не влияют на качественные выводы. Здесь это не так. Любое незначительное отклонение цены от равновесной приводит к нарушению равенства III, и система переходит в режим работы I или II. А ведь при анализе случаев дефицита и избытка ресурса для нас вовсе не было важно, чтобы соответствующие неравенства выполнялись с большим запасом. Пусть кто-то недополучит какую-то «малость». Но почему бы ему тогда не достичь полного «комфорта», увеличив слегка запрос? И получается все то же самое, разве что скорость изменения запросов будет несколько меньшей *.

К этому остается добавить, что для определения равновесной цены нужна достоверная информация. Но если таковая имеется, то можно вообще обойтись в системе без внутренней цены, выплачивая элементам пропорционально $\alpha_i\sqrt{r_i}$ и решая задачу (1.1). Кроме того, занимаясь весьма условной моделью, все же нужно «держать на прицеле» реальные системы. А в реальных системах коэффициенты эффективности производства меняются с течением времени (ломается и модернизируется оборудование, вдруг начинается эпидемия гриппа — и некому работать и т. д.). Поэтому раз установленная цена с течением времени перестает быть равновесной.

На данном этапе рассуждений нетрудно прийти к мысли, что цена на сырье должна как-то изменяться, подстраиваться. Вопрос этот достаточно сложен. Первая идея, которая здесь приходит: адаптивная подстройка цены. Если суммарный запрос превышает имеющийся у ЦО запас ресурса — цена увеличивается, если же суммарный запрос меньше запаса ресурса — цена уменьшается. Такой способ имеет свои недостатки. Во-первых, даже если система оказывается устойчивой, равновесное распределение ресурса не совпадает с оптимальным (хотя и близко к нему; см. [1]). Во-вторых, и этот недостаток более серьезен, если коэффициенты эффективности $\alpha_i$ меняются с течением времени, то «отставание» траектории от квазиравновесия также влечет за собой потери.

Прежде чем переходить к закону управления, который будет основным объектом нашего изучения, сделаем одно замечание. Часто возражают, что проблемы управления рассматриваемой

* И в реальной жизни можно действительно встретить системы, в которых все получают почти столько, сколько нужно, но из-за очень малого дефицита ресурса устанавливается в результате порочная практика просить, скажем, на 30% больше. За примером далеко не надо ходить. Планируя объем данной книги в 15—17 печатных листов, автор вынужден был в заявке указать существенно больше.

моделью надуманные. Достаточно, например, хотя бы один раз «понаблюдать» за деятельностью элементов, после чего по объему выходной продукции $y_i$ и потребляемому ресурсу $r_i$ легко восстановить коэффициент $\alpha_i = y_i/\sqrt{r_i}$. Затем уже распределение ресурса можно вести на основе вычисленных коэффициентов $\alpha_i$. Между прочим, эту идею часто применяют на практике, реализуя так называемый принцип планирования от достигнутого. Уже из жизненных наблюдений можно сказать, чем такой принцип плох. Элементы (предприятия) начинают работать ниже своих предельных возможностей, так как периоды функционирования системы оказываются связанными между собой, и каждый элемент теперь стремится максимизировать некоторый суммарный выигрыш, а не выигрыш в каждом отдельном периоде. Формальный анализ нашей частной модели подтверждает это общее правило (см. [1]).

## § 2. Принцип открытого управления

Принцип открытого управления в применении к рассматриваемой модели означает следующее. Получив от элементов $A_i$ оценки $x_i$ коэффициентов эффективности $\alpha_i$, ЦО принимает за целевые функции элементов функции

$$\hat{D}_i = x_i\sqrt{r_i} - \lambda r_i \tag{2.1}$$

и далее назначает такую цену и такое распределение ресурсов, что при назначенной цене каждая функция (2.1) достигает максимума по $r_i$.

Последняя задача решается элементарно. Приравняем нулю производные функции $\hat{D}_i$ по $r_i$. В результате получаем

$$\frac{d\hat{D}_i}{dr_i} = \frac{x}{2\sqrt{r_i}} - \lambda = 0, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Решая это совместно с уравнением $\sum_i r_i = R$, имеем

$$r_i = \frac{x_i^2}{\sum_{j=1}^n x_j^2} R, \quad \lambda = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\sum_{j=1}^n x_j^2}{R}}. \tag{2.2}$$

После подстановки законов управления (2.2) в целевые функции элементов получаем

$$D_i(x) = \alpha_i\sqrt{r_i} - \lambda r_i = x_i\left(\alpha_i - \frac{1}{2}x_i\right)\sqrt{\frac{R}{\sum_{j=1}^n x_j^2}}. \tag{2.3}$$

Таким образом, функционирование системы сводится к последовательно повторяемой игре $n$ элементов $A_i$ с функциями выигрыша (2.3).

Уже в предыдущем параграфе мы придерживались той точки зрения, что элементы изменяют свои переменные по направлению роста своих функций выигрыша, т. е. руководствуются тактикой индикаторного поведения. Примем такое предположение и здесь *. Тогда равновесной будет точка Нэша, которая в данном случае легко определяется из решения системы уравнений:

$$\forall\, i : \partial D_i/\partial x_i = 0.$$

Займемся изучением свойств оператора межэлементных связей $F(\boldsymbol{x}) = \{f_1(\boldsymbol{x}), \ldots, f_n(\boldsymbol{x})\}$. Каждая компонента $f_i(\boldsymbol{x})$ определяется из решения уравнения

$$\frac{\partial D_i(x_1, \ldots, x_{i-1}, f_i(x), x_{i+1}, \ldots, x_n)}{\partial x_i} = 0,$$

которое после элементарных преобразований приводится к виду

$$\sigma_i^2 (\alpha_i - f_i(\boldsymbol{x})) = \frac{1}{2} f_i^3(\boldsymbol{x}), \tag{2.4}$$

где $\sigma_i^2 = \sum\limits_{j \neq i} x_j^2 = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j^2 - x_i^2$.

Из (2.4) легко сделать вывод, что $f_i(\boldsymbol{x})$—монотонно возрастающая функция $\sigma_i^2$. Поэтому оператор $F(\boldsymbol{x})$—монотонный, т. е. система положительно гомогенна.

Покажем, что оператор $F(\boldsymbol{x})$ вогнут, т. е.

$$\forall\, i : f_i(\tau \boldsymbol{x}) > \tau f_i(\boldsymbol{x});\ \boldsymbol{x} \in \operatorname{int} R_+^n,\ \tau \in (0, 1).$$

Возьмем произвольные $i$ и $\boldsymbol{x} \in \operatorname{int} R_+^n$. Пусть $f_i(\boldsymbol{x}) = a_i$— решение (2.4) [легко убедиться, что решение (2.4) всегда существует, причем $0 \leqslant f_i(\boldsymbol{x}) \leqslant \alpha_i$], а $b_i$ удовлетворяет уравнению

$$\tau^2 \sigma_i^2 (\alpha_i - b_i) = \frac{1}{2} b_i^3. \tag{2.5}$$

Нам надо доказать неравенство $b_i > \tau a_i$. После замены в (2.5) $b_i$ на $\tau a_i$ левая часть становится больше правой (проверьте), но левая часть (2.5) убывает по $b_i$, а правая возрастает, поэтому $b_i > \tau a_i$. Итак, оператор $F(\boldsymbol{x})$ вогнут.

Существование неподвижной точки $F(\boldsymbol{x})$ следует из наличия у $F$ инвариантно конусного отрезка $\langle 0, \alpha \rangle$, $\alpha = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$. Это вытекает из того, что при любом $\boldsymbol{x} \in R_+^n$ решение (2.4) $f_i(\boldsymbol{x})$ принадлежит отрезку $[0, \alpha_i]$.

* См. обсуждение примера 3 в § 2 главы I.

Теперь можно «собрать урожай», используя результаты глав III, VII, IX. Ненулевая неподвижная точка $x^*$ у оператора $F$ (т. е. ненулевое положение равновесия по Нэшу) заведомо единственна. Положение равновесия $x^*$ глобально асимптотически устойчиво на $\operatorname{int} R_+^n$ по отношению к процедуре (I.1.4), а также глобально устойчиво в смысле (IX.0.1), если система функционирует на некотором конусном отрезке, охватывающем $x^*$ (т. е. на переменные $x_i$ имеются ограничения снизу и сверху).

Закончив исследование устойчивости, вернемся к одному из главных содержательных вопросов нашей задачи. Ведь если равновесное распределение ресурса далеко от оптимального, то приятный вывод об устойчивости системы вряд ли может компенсировать материальные потери.

Рассмотрим сначала простой пример системы с одинаковыми элементами: все $\alpha_i = \alpha$. В этом случае равновесная точка $x^*$ легко определяется в явном виде:

$$\text{все } x_i^* = \frac{2n-2}{2n-1}\alpha.$$

Отсюда видно, что (уже при сравнительно малом числе элементов) $x_i^*$ мало отличается от $\alpha_i$, а значит, распределение

$$r_i = \frac{(x_i^*)^2}{\sum\limits_{j=1}^{n} (x_j^*)^2} R$$

близко к оптимальному:

$$r_i = \frac{\alpha_i^2}{\sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j^2} R.$$

Такая закономерность сохраняется и в общем случае. Покажем, что $x_i^* \to \alpha_i$ при $n \to \infty$. При анализе такого предельного перехода, очевидно, нужно сделать дополнительное предположение о том, что коэффициенты эффективности $\alpha_i$ не могут сколь угодно сильно отличаться друг от друга (иначе в системе возможны монопольные эффекты; даже при очень большом числе элементов практически весь ресурс могут получать всего лишь несколько монополистов). В соответствии с этим предположим

$$\forall i: 0 < \alpha_{\min} \leqslant \alpha_i \leqslant \alpha_{\max}.$$

Отсюда нетрудно сделать вывод, что все $x_i^*$ принадлежат некоторому сегменту $[a_{\min}, a_{\max}]$, причем $a_{\min} > 0$.

Учитывая теперь, что равновесная точка $x^*$ — решение системы уравнений (2.4) (для всех $i$), получаем

$$0 \leqslant \lim_{n\to\infty}(\alpha_i - x_i^*) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \frac{(x_i^*)^3}{\sigma_i^2} \leqslant \lim_{n\to\infty} \frac{a_{\max}^3}{(n-1)\,\sigma_{\min}^2} = 0.$$

Итак, при достаточно большом числе элементов равновесное распределение ресурса в системе сколь угодно близко к оптимальному *.

## § 3. Еще об одной схеме организации

После описанных выше попыток конструирования различных схем организации работы системы, в которой должна решаться задача распределения ресурса, ясно, что исходная содержательная задача имеет примерно такой вид. У ЦО есть ресурс в количестве $R$, у элементов нет ресурса, но они способны его перерабатывать, производя полезную продукцию. В задачу ЦО входит такая организация работы системы, которая могла бы обеспечивать максимальный выпуск продукции системой в целом. Эта задача заключается в необходимости совместного решения трех вопросов:

1) установление формы оплаты труда, т. е. назначение элементам функций выигрыша (критериальное управление);

2) организация сбора информации о характеристиках нижнего уровня;

3) выбор правил распределения ресурса, назначения цен, процентов отчисления и т. п. (т. е. определение правил вычисления управляющих параметров, входящих в функции выигрыша элементов).

До сих пор мы, пожалуй, недостаточно использовали возможность ЦО в выборе формы оплаты труда и введении дополнительных управляющих параметров.

Положим, ЦО платит каждому элементу $A_i$ некоторый процент от прибыли, которую $A_i$ дает системе. Другими словами, функцией выигрыша $A_i$ служит

$$D_i = \mu(\alpha_i \sqrt{r_i} - \lambda r_i),$$

где $\mu$ — коэффициент (норматив) отчисления.

Пусть законы управления $r_i(x)$, $\lambda(x)$ остаются прежними, т. е. определяются функциями (2.2), а коэффициент $\mu$ выбирается из условия

$$\mu\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \sqrt{r_i} - \lambda R\right) = M = \mathrm{const}.$$

* Практически уже при двух участниках объем выпуска продукции системы отличается от максимально возможного на 1—2%.

Таким образом, суммарный выигрыш элементов здесь постоянен. Получается нечто вроде игры с общей кассой, и этим ликвидируется существовавшая в предыдущей модели общая цель элементов понизить цену $\lambda$ (см. обсуждение примера 3 в § 2 главы I).

Проведем формальный анализ. После подстановки законов управления (2.2) в функцию выигрыша $A_i$, которая теперь равна

$$D_i = M \frac{\alpha_i \sqrt{r_i} - \lambda r_i}{\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \sqrt{r_j} - \lambda R},$$

получаем

$$D_i(\boldsymbol{x}) = M \frac{x_i \left(\alpha_i - \frac{1}{2} x_i\right)}{\sum_{j=1}^{n} x_j \left(\alpha_j - \frac{1}{2} x_j\right)}. \tag{3.1}$$

Предположим для простоты, что все $x_i \in (0, 2\alpha_i)$. Функция (3.1) монотонно возрастает по $x_i(\alpha_i - x_i/2)$, а $x_i(\alpha_i - x_i/2)$ достигает максимума в точке $x^* = \alpha_i$. Поэтому в равновесии здесь все элементы сообщают наверх достоверную информацию, и распределение ресурса чисто оптимальное. Оператор межэлементных связей имеет компоненты $f_i(\boldsymbol{x}) \equiv \alpha_i$, поэтому межэлементные связи в системе «отсутствуют» и вопросы устойчивости элементарны.

Помимо этого данная модель обладает той приятной особенностью, что точка $\boldsymbol{x}^* = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ — не только равновесие по Нэшу, но и единственный оптимум Парето, а также решение, в котором каждому элементу гарантирован максимальный выигрыш при любых изменениях стратегий остальных $A_i$.

## § 4. Более общая точка зрения

Хотя описанная в предыдущем параграфе схема организации, по-видимому, одна из наилучших для данной модели, она не совсем удобна для обобщений, и мы вернемся к модели, рассмотренной в § 2. Как мы видели, принцип открытого управления дает удовлетворительное решение задачи. Возникает закономерный вопрос: в чем достоинства этого принципа и нет ли других способов управления, приводящих к тому же результату?

Поскольку принцип открытого управления состоит, по существу, в «заботе об интересах нижнего уровня», представляет интерес сравнить его с прямо противоположным (эгоистическим) принципом, в соответствии с которым ЦО, получая вектор $x$, подставляет его в (1.1) вместо $\alpha = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ и решает задачу (1.1), т. е. максимизирует свою целевую функцию (полностью игнорируя интересы нижнего уровня), а цену, например, определяет равной соответствующему множителю Лагранжа. Легко видеть, что в нашей модели оба эти принципа приводят к одному и тому же закону управления (2.2).

Видоизменим модель так, чтобы различие этих принципов стало осязаемым. Пусть теперь целевой функцией ЦО служит

$$D = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \alpha_i \sqrt{r_i}, \tag{4.1}$$

где положительные коэффициенты $\beta_i$ не все совпадают между собой. Содержательная подоплека задачи для нас не важна, и мы не будем на этом останавливаться (хотя и легко придумать здесь правдоподобную «сказку»).

Понятно, что принцип открытого управления в этой модели приводит к прежним правилам (2.2), и равновесие $x^*$ будет определяться той же самой системой уравнений

$$\forall i: \sum_{j \neq i} x_j^2 (\alpha_i - x_i) = \frac{1}{2} x_i^3; \tag{4.2}$$

при этом выигрыш ЦО в равновесии будет равен

$$D^* = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \alpha_i x_i^* \sqrt{\frac{R}{\sum_j (x_j^*)^2}}. \tag{4.3}$$

Если же ЦО руководствуется упоминавшимся выше «эгоистическим принципом», то получаются такие законы управления, которые после подстановки в функции $D_i = \alpha_i \sqrt{r_i} - \lambda r_i$ дают:

$$D_i = \left(\beta_i \alpha_i x_i - \frac{\beta_i^2 x_i^2}{2}\right) \sqrt{\frac{R}{\sum_j (\beta_j x_j)^2}},$$

и равновесная точка $x^{**}$ определится из решения системы уравнений

$$\forall i: \sum_{j \neq i} (\beta_j x_j)^2 (\alpha_i - \beta_i x_i) = \frac{1}{2} (\beta_i x_i)^3. \tag{4.4}$$

Сравнивая (4.2) и (4.4), получаем $x_i^{**} = x_i^* / \beta_i$, что после подстановки в $r_i(x)$, а потом в (4.1) снова дает (4.3).

Таким образом, имеет место любопытная ситуация. Если ЦО, используя принцип открытого управления, в первую очередь заботится об интересах нижнего уровня, то получаемая им (в равновесии) информация близка к достоверной, но центр несет потери, так как на этапе распределения ресурса пренебрегает собственными интересами. Если же ЦО игнорирует интересы нижнего уровня и при распределении исходит из максимизации собственного критерия, то потери возникают из-за недостоверности информации. Причем в том и другом случае потери в точности совпадают. Это наталкивает на мысль, что системой все равно как управлять. Главное, чтобы законы управления удовлетворяли некоторым естественным условиям. Мы не будем детализировать сказанное, так как далее все разъяснится в явном виде.

Откажемся от предположения $\varphi_i(r_i)=\alpha_i\sqrt{r_i}$ и будем рассматривать систему с целевыми функциями элементов

$$D_i=\varphi_i(r_i)-\lambda r_i,$$

где производственные функции $\varphi_i(r_i)$—монотонно возрастающие и строго вогнутые, причем $\varphi_i(0)=0$, $\varphi_i'(0)=\infty$.

Управление системой осуществляется следующим образом. Каждый $A_i$ сообщает центру скалярную величину $x_i$ [которая может и не иметь физического (экономического) смысла]. На основе вектора $\boldsymbol{x}$ центр распределяет ресурс $\{r_i(\boldsymbol{x})\}$ и назначает цену $\lambda(\boldsymbol{x})$, причем $i$-му элементу известны функции $r_i(\boldsymbol{x}), \lambda(\boldsymbol{x})$, а следовательно, известна собственная целевая функция как функция вектора $\boldsymbol{x}$

Теперь задачу ЦО можно мыслить как выбор из некоторого множества такого закона управления $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{x})$, $\lambda(\boldsymbol{x})$, который обеспечивал бы центру в равновесии наибольший выигрыш. Эта задача весьма сложна и в указанном виде даже некорректна. Мы попытаемся дать ответ на поставленный вопрос в некоторых дополнительных предположениях. Для начала ограничим множество возможных законов управления $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{x})$, $\lambda(\boldsymbol{x})$ некоторыми естественными требованиями.

Для каждого $A_i$ переменная $x_i$ служит тем рычагом, меняя положение которого, он меняет количество получаемого ресурса и цену. Вполне естественным выглядит требование монотонности соответствующих зависимостей, например

$$\forall i, x: \frac{\partial r_i}{\partial x_i}>0, \quad \frac{\partial\lambda}{\partial x_i}>0. \tag{4.5}$$

Поскольку центр заранее не знает, какая точка $\boldsymbol{x}$ окажется равновесной, необходимо, чтобы при любом $\boldsymbol{x}$ распределялся весь ресурс, т. е.

$$\forall \boldsymbol{x}: \sum_{i=1}^{n} r_i(\boldsymbol{x})=R. \tag{4.6}$$

Наконец, будем предполагать наличие функциональных зависимостей

$$r_i(x)=\varkappa_i(x_i, \lambda(x)). \tag{4.7}$$

Нарушение любого из условий (4.5)—(4.7) влечет за собой те или иные неприятные последствия (на обсуждении которых мы не останавливаемся). По этой причине законы управления $r(x), \lambda(x)$, удовлетворяющие условиям (4.5)—(4.7), названы законами минимально разумного управления (МРУ).

Игнорируя некоторые детали (которые далее будут уточнены), можно утверждать, что при достаточно большом числе элементов в системе все законы МРУ приводят в равновесии к одному и тому же распределению ресурса (вернее, одно и то же распределение ресурса получается в пределе при $n\to\infty$). При этом предельное распределение ресурса является решением экстремальной задачи

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi_i(r_i)\to\max, \qquad \sum_{i\in} r_i=R. \tag{4.8}$$

Такая нечувствительность равновесия (в пространстве векторов $r$, но не $x$) к изменению закона управления на первый взгляд представляется весьма неожиданной. Однако этот результат легко понять на основе совсем простых соображений. В равновесной по Нэшу точке должно выполняться условие $\forall i: \partial D_i/\partial x_i=0$, т. е.

$$\frac{d\varphi_i(r_i)}{dr_i}\frac{\partial r_i}{\partial x_i}-\lambda\frac{\partial r_i}{\partial x_i}-r_i\frac{\partial\lambda}{\partial x_i}=0,$$

или в эквивалентной записи

$$\frac{d\varphi_i(r_i)}{dr_i}-\lambda=r_i\frac{\partial\lambda}{\partial x_i}\Big/\frac{\partial r_i}{\partial x_i}. \tag{4.9}$$

Интуитивно ясно, что при достаточно большом числе участников влияние каждого $A_i$ на цену весьма мало́ (по сравнению, например, с влиянием на получаемый ресурс). Если при этом, действительно, в равновесии

$$\forall i: r_i\frac{\partial\lambda}{\partial x_i}\Big/\frac{\partial r_i}{\partial x_i}\to 0 \text{ при } n\to\infty, \tag{4.10}$$

то при достаточно большом $n$ условия (4.9) сколь угодно близки к классическим условиям оптимума задачи (4.8).

Итак, стержнем вопроса в данном случае является строгое обоснование предельного соотношения (4.10), которое будем называть *условием слабого влияния.*

Прежде всего оговорим, что́ здесь разумно понимать под предельным переходом. Если $n\to\infty$, а запас ресурса $R$ остается ограниченным, то справедливость (4.10) нас вряд ли удовлетворит, так как наличие предела, возможно, будет лишь следствием того, что получаемые элементами количества ресурса стремятся к нулю. Поэтому будем считать, что $R$ растет пропорционально $n$.

Кроме того, как и в § 2, нужно «избежать» в системе монопольных эффектов. Для этого предположим, что элементы в системе (при любом $n$) не могут по производственным характеристикам сколь угодно сильно отличаться друг от друга. Это предположение можно «материализовать» в различных формах [например, для любых $A_i$, $A_j$ отношение $\varphi_i'(r)/\varphi_j'(r)$ не может быть при любом $r>0$ сколь угодно велико или же сколь угодно мало]. Форма для нас не важна. Для нас важно, что из такого предположения вытекает существование и ограниченность снизу и сверху положительными константами равновесных цен $\lambda^*$, равновесных стратегий $\boldsymbol{x}^*$ и равновесных количеств распределяемых ресурсов $\boldsymbol{r}^*$ (при любом $n$).

Наконец, отметим, что все функции предполагаются непрерывно дифференцируемыми «столько раз, сколько это нужно».

Теорема 4.1 (*о слабом влиянии*). *Любой закон МРУ удовлетворяет условию слабого влияния.*

Доказательство. Возьмем произвольный закон $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{x}), \lambda(\boldsymbol{x})$, удовлетворяющий условиям (4.5)—(4.7). В равновесной точке $\boldsymbol{x}^*$ удовлетворяется система уравнений

$$\begin{aligned} &\forall\, i: r_i(\boldsymbol{x}^*) = \varkappa_i(x_i^*, \lambda(\boldsymbol{x}^*)); \\ &\sum_{j=1}^{n} r_i(\boldsymbol{x}^*) = nR \end{aligned} \tag{4.11}$$

(напомним: мы договорились, что общий запас ресурса растет пропорционально $n$).

Пусть элемент $A_i$ изменил $x_i^*$ на малую величину $\Delta x_i$. Тогда изменение равновесной цены $\Delta\lambda$ удовлетворяет уравнению

$$\sum_j \varkappa_j(x_j^*, \lambda^*) + \sum_j \frac{\partial \varkappa_j}{\partial \lambda}\Delta\lambda + \frac{\partial \varkappa_i}{\partial x_i}\Delta x_i = nR,$$

что после сравнения с (4.11) дает

$$\Delta\lambda = -\left(\frac{\partial \varkappa_i}{\partial x_i} \Big/ \sum_j \frac{\partial \varkappa_j}{\partial \lambda}\right)\Delta x_i.$$

Далее

$$\Delta r_i = \frac{\partial \varkappa_i}{\partial x_i}\Delta x_i + \frac{\partial \varkappa_i}{\partial \lambda}\Delta\lambda = \frac{\partial \varkappa_i}{\partial x_i}\left(1 + \frac{\partial \varkappa_i}{\partial \lambda} \Big/ \sum_j \frac{\partial \varkappa_j}{\partial \lambda}\right)\Delta x_i$$

и наконец

$$\frac{\Delta\lambda}{\Delta x_l}\Big/\frac{\Delta r_l}{\Delta x_l} = -\frac{1}{\sum\limits_{l}\frac{\partial\varkappa_l}{\partial\lambda}\left(1+\frac{\partial\varkappa_l}{\partial\lambda}\Big/\sum\limits_{k}\frac{\partial\varkappa_k}{\partial\lambda}\right)}. \tag{4.12}$$

Если все $A_j$ за исключением $A_l$ увеличивают величины $x_j$, то $\lambda$ и все $r_j$ возрастают в силу (4.5), а в соответствии с (4.6) $r_l$ уменьшается. Поэтому функция $\varkappa_l(x_l, \lambda)$ при любом фиксированном $x_l > 0$ строго убывает по $\lambda$, т. е. $\partial\varkappa_l/\partial\lambda < 0$. Отсюда ясно, что в равновесии (в предположении отсутствия в системе «монопольных эффектов») будет $\partial\varkappa_l/\partial\lambda \leqslant -\varepsilon < 0$. Совершая теперь в (4.12) предельный переход, получаем (4.10). ▲

По указанным выше причинам из теоремы 4.1 можно сделать следующий вывод.

Теорема 4.2. *При достаточно большом $n$ любой закон МРУ в равновесии дает распределение ресурса, сколь угодно близкое к оптимальному по критерию (4.8).* ▲

Попытаемся теперь разобраться, что же означает условие минимальной разумности управления и как строить законы МРУ. Так как функции $\varkappa_i$ монотонны по $\lambda$, то они обратимы, и вместо (4.7) можно писать $\lambda = \xi_i(x_i, r_i)$. Легко понять, что закон МРУ — не что иное, как принцип открытого управления, при условии, что ЦО принимает за целевые функции элементов функции *

$$D_l = \int\limits_{\varepsilon}^{x_l} \xi_l(\tau, r_l)\,d\tau - \lambda r_l.$$

На этой основе легко получить благоприятный ответ на вопрос, который было естественно поставить в самом начале исследования: что будет происходить, если ЦО, используя принцип открытого управления, ошибается в выборе вида производственных функций элементов? Теперь ясно, что в этом случае равновесное распределение ресурса будет все равно близко к оптимальному.

## § 5. Композиционно гетерогенные системы

На примере модели, рассмотренной в предыдущем параграфе, удобно пояснить некоторые положения, касающиеся вопросов устойчивости систем. Сделаем сначала несколько общих замечаний безотносительно к конкретной модели.

В зависимости от конкретной ситуации происхождение функций-индикаторов $g_l(x)$ [равно, как и функций $f_l(x)$] может быть суще-

---

* Сейчас также принято законы МРУ называть законами согласованного управления.

ственно различным. В одном из возможных вариантов $g_i(\boldsymbol{x})$ — непосредственно наблюдаемая элементом $A_i$ величина [или сигнал, непосредственно воздействующий (физически) на элемент $A_i$]; в другом — наблюдаемым является состояние системы $\boldsymbol{x}=\{x_1, \ldots, x_n\}$, а функцию $g_i(\boldsymbol{x})$ [или $f_i(\boldsymbol{x})$] элемент вычисляет уже самостоятельно.

В игровых моделях часто встречается своеобразный промежуточный вариант. Для каждого элемента $A_i$ наблюдаемыми являются лишь некоторые агрегаты $r_i(\boldsymbol{x})=\{r_{i1}(\boldsymbol{x}), \ldots, r_{in_i}(\boldsymbol{x})\}$ состояния системы $x$, на основе которых $A_i$ производит расчет $g_i(r_i(\boldsymbol{x}))$. Определение текущего положения цели $f_i(\boldsymbol{x})$ в такой ситуации нередко становится невозможным. Правда, элемент при этом может ориентироваться на достижение некоторой приближенной цели $f_i(r_i(\boldsymbol{x}))$, которая зависит уже не только от стратегий остальных элементов, но и от его собственной. Это представляется вполне разумным отражением действительности, тем более если учесть, что элемент при выборе функции $g_i$ (или $f_i$) может вовсе не стремиться к достижению условного максимума своей функции выигрыша $D_i(\boldsymbol{x})$. Его поведение определяется скорее собственными представлениями об игре, чем только заданием функции $D_i(\boldsymbol{x})$. Здесь важны самые разнообразные факторы: степень понимания игры, доступность информации и умение ее использовать, сознательная ориентация на грубое (приближенное) решение или стремление к учету всех эффектов, вплоть до высоких порядков малости, и т. п.

Многие из отмеченных выше особенностей игровых моделей достаточно отчетливо прослеживаются в задаче распределения ресурса, рассмотренной в предыдущем параграфе. При определенных (очевидных) предположениях функцией-индикатором для $A_i$ может служить

$$g_i(\boldsymbol{x})=\frac{\partial D_i}{\partial x_i}=\left(\frac{d\varphi_i}{dr_i}-\lambda\right)\frac{\partial r_i}{\partial x_i}-r_i\frac{\partial \lambda}{\partial x_i}. \qquad (5.1)$$

Вообще говоря, непосредственно наблюдаемыми величинами для $A_i$ являются $r_i$, $\lambda$ и $x_i$, и если последних недостаточно для определения производных $\partial r_i/\partial x_i$ и $\partial\lambda/\partial x_i$, то $A_i$ не в состоянии вычислить текущее значение функции-индикатора вида (5.1). Но если величина $r_i\frac{\partial\lambda}{\partial x_i}\Big/\frac{\partial r_i}{\partial x_i}$ достаточно мала (как в случае слабого влияния), то $A_i$ в качестве функции индикатора может использовать

$$g_i(\boldsymbol{x})=\frac{d\varphi_i}{dx_i}-\lambda. \qquad (5.2)$$

Элемент $A_i$ может руководствоваться в своем поведении функцией-индикатором (5.2) даже в том случае, когда он в состоянии вычислить производные $\partial r_i/\partial x_i$ и $\partial\lambda/\partial x_i$, но, сознавая свое слабое влияние на цену, не желает производить вычислений, дающих заведомо малый эффект.

Итак, пусть функциями-индикаторами элементов $A_i$ являются функции (5.2). Так как в данном случае $g_i$ монотонно убывают по $r_i$ и $\lambda$, а агрегаты $r_i(\boldsymbol{x})$ и $\lambda(\boldsymbol{x})$ — обобщенно монотонные функции, система композиционно гетерогенна (векторная функция-индикатор $G$ представляет собой композицию гетерогенных операторов), а значит — гетеротонна, и к ней можно применять результаты главы VII *. Однако здесь необходима определенная осторожность. Дело в том, что для устойчивости системы одной гетеротонности недостаточно. Одно из существенных условий — наличие у оператора межэлементных связей некоторого сильно инвариантного конусного отрезка $\langle \boldsymbol{v}^0, \boldsymbol{w}^0 \rangle$. Если пренебречь влиянием отдельного элемента на цену, то в терминах функций-индикаторов (5.2) это требование приобретает вид

$$\forall\, i : g_i[r_i(\boldsymbol{v}^0), \lambda(\boldsymbol{w}^0)] \geqslant 0; \qquad \forall\, i : g_i[r_i(\boldsymbol{w}^0), \lambda(\boldsymbol{v}^0)] \leqslant 0, \tag{5.3}$$

т. е. чтобы конусный отрезок $\langle \boldsymbol{v}^0, \boldsymbol{w}^0 \rangle$ был сильно инвариантным, необходимо выполнение неравенств (5.3). Однако легко убедиться, что в данном случае эти неравенства противоречивы.

Один из возможных выходов из положения состоит в следующем. Поскольку $r_i(\boldsymbol{x})$, $\lambda(\boldsymbol{x})$ принадлежат классу минимально разумных законов управления, имеются функциональные связи

$$\lambda(\boldsymbol{x}) = \xi_i(x_i, r_i(\boldsymbol{x}));$$

поэтому функция-индикатор

$$g_i = \frac{d\varphi_i(r_i(\boldsymbol{x}))}{dr_i} - \xi_i(x_i, r_i(\boldsymbol{x})) \tag{5.4}$$

тождественно совпадает с (5.2), и переход от (5.2) к функциям-индикаторам (5.4) не меняет уравнений движения системы.

Казалось бы, здесь возникает новая трудность. Функция (5.4) $g_i(x_i, r_i(\boldsymbol{x}))$ может уже не быть монотонной по $x_i$. Однако ничто не мешает один и тот же агрегат $r_i(\boldsymbol{x})$, стоящий под знаком функции $d\varphi_i/dr_i$ и под знаком функции $\xi_i$, обозначить разными буквами и рассматривать его в том и другом случае как два разных параметра. Число агрегатов при этом возрастает, но система вновь «становится» композиционно гетерогенной. Если проделать указанную манипуляцию, то после возвращения к старым переменным неравенства, несущие ту же смысло-

* Вообще говоря, для данной простой модели быстрее к цели ведут результаты, изложенные в главе VIII. С точки же зрения обобщений на более сложные типы систем результаты главы VII представляются более перспективными.

вую нагрузку, что и (5.3), принимают вид

$$\forall i: \frac{d\varphi_i(r_i(v^0))}{dr_i} - \xi_i(v_i^0, r_i(w^0)) \geqslant 0;$$

$$\forall i: \frac{d\varphi_i(r_i(w^0))}{dr_i} - \xi_i(w_i^0, r_i(v^0)) \leqslant 0.$$

Эти неравенства справедливы при весьма свободных предположениях.

Описанные технические приемы оказываются полезными при изучении более сложных моделей.

## § 6. О задачах метаигрового синтеза

В этой главе мы рассмотрели достаточно простую (с технической точки зрения) задачу распределения одномерного ресурса. Эта задача, однако, в идейном отношении отнюдь не тривиальна и отражает многие принципиальные вопросы, возникающие при исследовании различных экономических систем.

До недавнего времени решение задач управления экономическими системами мыслилось в большинстве случаев как решение тех или иных задач оптимизации на основе всей необходимой информации. Конечно, такая постановка вопроса имеет право на существование и в ряде случаев дает в результате ощутимый экономический эффект. Однако все чаще и чаще исследования в этой области сталкиваются с необходимостью учета так называемого человеческого фактора. Элементы системы имеют индивидуальные интересы и обладают теми или иными степенями свободы, которые могут использовать, ориентируясь на достижение собственных целей. Понятно, что учет подобных факторов в корне меняет содержание задач управления, и этот тезис достаточно красноречиво иллюстрирует модель распределения ресурса.

Упомянутое выше наличие степеней свободы у элементов — не что иное, как более или менее широкие возможности в предоставлении центру недостоверной информации, а также способность элементов работать ниже своих предельных возможностей. При введении частичной децентрализации количество «рычагов» у элементов, которыми они могут самостоятельно распоряжаться, значительно увеличивается.

В дополнение к сказанному следует указать еще на два обстоятельства. Во-первых, в рассматриваемых системах, как правило, оказывается существенным наличие межэлементных взаимодействий: действия одного элемента влияют не только на его собственный выигрыш, но и на выигрыши других элементов. Во-вторых, в таких системах элементам нижних уровней известен закон управления, осуществляемый центром, т. е. способ формирования цен, планов и так далее на основе поступающей информации. В результате элементы знают свои функции выигрыша как функции собственных стратегий. Все это вместе взятое позволяет охарактеризовать функционирование подобной системы как игру многих лиц (игроков), в которой есть выделенный метаигрок (ЦО), избирающий тот или иной закон управления и тем самым задающий игру (правила игры).

Задачу управления системой здесь естественно понимать следующим образом. Центр стремится выбрать такой закон планирования, т. е. как определить игру между остальными элементами системы, чтобы в равновесной точке достигался максимум его собственного выигрыша.

Анализ рассмотренной выше задачи распределения ресурса довольно отчетливо выявляет тот факт, что сущность предлагаемого метаигрового подхода к управлению иерархическими системами состоит не столько в определении наилучших способов формирования цен, планов и так далее, сколько в методологии анализа поведения элементов и синтеза системы в единое целое. С самого начала задача выглядит так: имеется совокупность элементов, которые способны что-то делать (перерабатывать сырье, выполнять те или иные заказы и т. д.), при этом у элементов нет никаких целевых функций. Центральный орган, не знающий истинных возможностей элементов, но имеющий об этом качественные представления, устанавливает систему оплаты (при этом у элементов появляются целевые функции) и так организует функционирование системы, чтобы в равновесной точке получающейся игры достигался максимум целевой функции ЦО. Существенную роль при этом играет наличие правильного представления о характере поведения элементов в игровой ситуации, без чего невозможно разумное определение и обоснование устойчивости равновесия.

С этой точки зрения многие экономические модели имеют нечто общее, и это общее заключается в следующем. Как правило, управляющие воздействия ЦО подразделяются на индивидуализированные (типа $r_i$) и общие (безадресные, типа $\lambda$). При этом оказываются справедливыми вариации теорем о слабом влиянии и о нечувствительности равновесия к способу минимально разумного управления.

## Дополнение первое

# ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРНОЙ ТОПОЛОГИИ

Если интересоваться лишь приложениями топологических методов к доказательству различных теорем существования, то вполне можно ограничиться содержанием второй главы, тем более, что § 4 главы II дает на наш взгляд достаточно ясное представление о геометрической природе этих методов. Желающих ознакомиться с формальными доказательствами основных результатов, приведенных в главе II без доказательств (существование неподвижной точки у поля с отличным от нуля вращением и теорема об алгебраическом числе нулей), также легко удовлетворить, отослав к монографии [32] (ставшей, правда, библиографической редкостью), где эти результаты устанавливаются на основе простых нумерационных соображений*, не требующих никаких специальных топологических знаний. Более того, недавно вышла в свет весьма интересная и содержательная книга [36], в которой дается практически замкнутое и достаточно обширное изложение теории вращения векторных полей, не требующее специальных познаний в топологии.

Несколько сложнее дело обстоит с теми, кто пожелает ознакомиться с топологическими методами более серьезно. Существующие руководства по топологии в основном чересчур сложны для начинающего. Популярные же издания, хотя и дают качественные представления о предмете, не создают необходимой базы для изучения более серьезной литературы. Основной трудностью при изучении топологии для тех, кто интересуется лишь ее прикладными аспектами, является, как правило, освоение исходных конструкций и категорий мышления, связь которых с приложениями на первых порах обычно не видна. Одна из таких категорий мышления в алгебраической топологии — понятие группы гомологий. Это понятие и рассматривается далее, причем прослеживается лишь одна линия возможного развития теории, связанная с изучением неподвижных точек. При благожелательном отношении данное дополнение может служить мостиком для перехода к более серьезному знакомству с предметом и, возможно, на этом пути поможет некоторым читателям

* Типа тех, которые обычно используются при доказательстве комбинаторной леммы Шпернера.

сэкономить время. Следует иметь в виду, что даже в выделенной узкой области последующее изложение не дает полной картины, это скорее эскиз, который при желании может быть дополнен недостающими подробностями (самостоятельно или с помощью соответствующих учебников).

Само по себе наблюдаемое в настоящее время возрастание интереса к топологическим методам в среде прикладников имеет естественные объяснения. В первую очередь оно, конечно, связано с важной ролью теорем о неподвижных точках. Вместе с тем нужно иметь в виду, что рассмотренный нами ранее круг вопросов далеко не исчерпывает возможностей применения методов алгебраической топологии к задачам статики сложных систем. Правда, этот факт в широких кругах специалистов пока еще не осознан в должной мере, но уже сейчас в подтверждение сказанного можно было бы указать на работы по системному анализу, использующие в качестве аппарата различные теоремы о покрытиях и разновидности теоремы Хэли. В общих чертах нетрудно себе представить также возможности применения к анализу нелинейных систем ряда теорем о зацеплениях пространств, свойствах ретрактов и многих других результатов сугубо топологической природы.

## § 1. Общие сведения из теории групп

Группой $G$ называется (конечная или бесконечная) совокупность элементов $a$, $b$, $c$, ... с бинарной операцией, сопоставляющей любым двум элементам $a$, $b \in G$ элемент $c = ab \in G$ и удовлетворяющей следующим условиям:

1) ассоциативность

$$a(bc) = (ab)c;$$

2) *групповая операция гарантирует существование единицы*, т. е. существование такого элемента $e \in G$, что $ae = ea = a$ для любого $a$ из $G$;

3) *групповая операция гарантирует существование обратных элементов*, т. е. для любого $a \in G$ существует элемент $a^{-1} \in G$ такой, что

$$a^{-1}a = aa^{-1} = e.$$

В случае конечной группы число ее элементов называют *порядком группы*.

Нас далее будут интересовать коммутативные ($ab = ba$) группы, называемые *абелевыми*. Групповую операцию при изучении абелевых групп принято обозначать знаком $+$ и называть сложением. При этом естественно единичный элемент группы называть нулевым элементом и писать $0$ ($a + 0 = 0 + a = a$), а обратный к $a$ элемент обозначать через $-a$.

Если множество $H \subset G$ замкнуто относительно групповой операции группы $G$, т. е. из $a$, $b \in H$ следует $a+b \in H$, то $H$ называется *подгруппой* $G$.

С каждой подгруппой $H$ группы $G$ можно связать множества

$$g+H=\{g+h \mid h \in H\},\ g \in G,$$

называемые *смежными классами* группы $G$ по подгруппе $H$.

Множество смежных классов можно сделать группой, если в нем ввести операцию, сопоставляющую классам $g_1+H$ и $g_2+H$ класс $g_1+g_2+H$. Эту группу принято называть *факторгруппой* группы $G$ по $H$ и обозначать $G/H$.

Отображение $\varphi: G \to G'$ группы $G$ в группу $G'$ называется *гомоморфизмом*, если

$$\varphi(a+b)=\varphi(a)+\varphi(b).$$

Существенная характеристика гомоморфизма $\varphi$ — его *ядро* $\ker \varphi$, представляющее собой множество тех элементов $a \in G$, которые переводятся в ноль группы $G'$, т. е. $\varphi(a)=0$. (Проверьте, что $\ker \varphi$ *представляет собой подгруппу группы* $G$.)

Если $\ker \varphi = G$, гомоморфизм $\varphi$ называется нулевым. В случае $\ker \varphi = 0$ говорят, что $\varphi$ — *инъективный гомоморфизм,* или *мономорфизм*. Если $\varphi(G)=G'$, то $\varphi$ называется *сюръективным гомоморфизмом*, или *эпиморфизмом*. Инъективный и сюръективный гомоморфизм называется *изоморфизмом*.

Если существует изоморфизм $\varphi: G \to G'$, то группы $G$ и $G'$ называются *изоморфными*. Изоморфные группы тождественны с точки зрения их абстрактных групповых свойств, хотя конкретные их интерпретации могут быть совершенно различными.

Группа $G$ называется *свободной*, если для любого ненулевого $a \in G$ при любом числе слагаемых $n>0$

$$a+\ldots+a=na \neq 0.$$

Группа $G$ называется *циклической*, если любой ее элемент можно представить в виде $na$ ($n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$). В этом случае $a \in G$ называется *порождающим элементом*. Любая свободная циклическая группа изоморфна группе

$$Z=\{\ldots, -1, 0, 1, \ldots\},$$

где групповая операция — обычное сложение.

Группа $G$ называется *группой с конечным числом образующих*, если любой ее элемент $g \in G$ представим в виде

$$g=\alpha_1 e_1+\ldots+\alpha_n e_n,$$

где все $e_i \in G$, $\alpha_i$ — целые числа.

Линейно независимая система образующих ($e_1, \ldots, e_n$) свободной абелевой группы называется ее *базисом*. Размерность базиса $n$ называется *рангом группы* $G$.

Пусть, к примеру, элементами $G$ являются векторы $\{m_1, \ldots, m_n\}$ с целочисленными координатами, причем сложение определяется по обычному правилу

$$(m_1, \ldots, m_n) + (k_1, \ldots, k_n) = (m_1 + k_1, \ldots, m_n + k_n).$$

Обозначим через $G_i$ $(i=1, \ldots, n)$ множество векторов, у которых все координаты за исключением $i$-й равны нулю. Легко видеть, что $G_i$ — подгруппа группы $G$, причем любой элемент $m = \{m_1, \ldots, m_n\} \in G$ может быть представлен в виде суммы элементов $g^1, \ldots, g^n$, принадлежащих соответственно $G_1, \ldots, G_n$:

$$g^i = (0, \ldots, 0, m_i, 0, \ldots, 0).$$

В этом случае говорят, что $G$ представляет собой *прямую сумму* подгрупп $G_i$, т. е.

$$G = G_1 + \ldots + G_n. \tag{1.1}$$

Так как каждая группа $G_i$ изоморфна группе $Z$, можно (1.1) записать в эквивалентной форме

$$G = Z + \ldots + Z,$$

где число слагаемых равно рангу группы $G$.

В теории групп доказывается, что *каждая абелева группа $G$ с конечным числом образующих представима в виде*

$$G = Z + \ldots + Z + K,$$

*где $K$ — конечная группа* (так называемая *группа кручения*).

## § 2. Симплексы и симплициальные комплексы

Симплекс представляет собой обобщение понятия отрезка (1-симплекс), треугольника (2-симплекс), тетраэдра (3-симплекс). Перейдем к формальному определению.

Пусть $p+1$ точек $a_0, a_1, \ldots, a_p$ из $R^n$ таковы, что векторы $a_1 - a_0, \ldots, a_p - a_0$ линейно независимы. В этом случае множество точек $x \in R^n$ таких, что

$$x = \sum_{i=0}^{p} \lambda_i a_i, \qquad \sum_{i=0}^{p} \lambda_i = 1, \qquad \lambda_i \geqslant 0 \qquad (i = 0, \ldots, p),$$

называется *$p$-мерным симплексом* (*$p$-симплексом*) и обозначается через $s^p = \{a_0 a_1 \ldots a_p\}$. Числа $\lambda_i$ называются барицентрическими координатами точки $x$; точки $a_0, a_1, \ldots, a_p$ — вершинами симплекса $s^p$. Очевидно, симплекс $s^p$ представляет собой выпуклую оболочку своих вершин.

Выпуклая оболочка любого подмножества множества вершин $a_0, a_1, \ldots, a_p$ называется *гранью симплекса* $s^p = \{a_0 a_1 \ldots a_p\}$.

Гомеоморфный образ симплекса называется *криволинейным симплексом*.

*Симплициальным комплексом* $K$ в $R^n$ называется конечное семейство симплексов $s_i^p$, удовлетворяющее условию: пересечение любых двух $s_i^p$, $s_i^q$ или пусто, или является гранью как $s_i^p$, так и $s_i^q$.

*Размерностью* комплекса $K$ называется наибольшая из размерностей составляющих его симплексов.

Множество всех точек из $R^n$, принадлежащих симплексам комплекса $K$, с топологией, индуцированной из $R^n$, называется *полиэдром* комплекса $K$ и обозначается $|K|$. Комплекс $K$ называют также *триангуляцией полиэдра* $|K|$.

Геометрически очевидно, что любой полиэдр можно сколь угодно мелко триангулировать (сделать максимальный диаметр составляющих симплексов сколь угодно малым). Формальное доказательство несколько длинно, и мы на нем не останавливаемся.

## § 3. Ориентация

Два базиса $e=\{e_1, \ldots, e_n\}$ и $e'=\{e_1', \ldots, e_n'\}$ пространства $R^n$ называются *одинаково ориентированными*, если матрица перехода $A(e'=Ae)$ такова, что $\det A>0$. В случае $\det A<0$ говорят, что базисы $e$ и $e'$ *противоположно ориентированы*. Очевидно, все базисы $R^n$ распадаются на два класса эквивалентных (в смысле ориентации) базисов.

Пусть дан симплекс $s^n=\{a_0a_1 \ldots a_n\}$. Очевидно, набор векторов

$$e_1=a_1-a_0, \ \ldots, \ e_n=a_n-a_0 \tag{3.1}$$

представляет собой базис в $R^n$. Рассмотрим теперь симплекс $\{a_{i_0}a_{i_1} \ldots a_{i_n}\}$, построенный на тех же вершинах, но взятых в другом порядке. Эти симплексы будем называть *одинаково* (*противоположно*) *ориентированными*, если базис (3.1) одинаково (противоположно) ориентирован с базисом

$$e_1'=a_{i_1}-a_{i_0}, \ \ldots, e_n'=a_{i_n}-a_{i_0}.$$

Ясно, что все возможные перестановки вершин симплекса разбиваются на два класса противоположно ориентированных симплексов. Если фиксирован некоторый базис $R^n$ и базис (3.1) ему эквивалентен, то ориентированный симплекс $s^n$ будем называть положительно ориентированным (в противном случае — отрицательно ориентированным и писать $-s^n$). Неориентированный симплекс будем обозначать $|s^n|$.

Легко проверить, что любое четное (нечетное) число перестановок двух вершин симплекса не меняет (меняет) его ориентацию.

## § 4. Коэффициенты инцидентности и оператор $\Delta$

Договоримся, что

$$(a_0 a_1 \ldots \hat{a}_i \ldots a_n) = (a_0 a_1 \ldots a_{i-1} a_{i+1} \ldots a_n),$$

т. е. крышечка над вершиной симплекса исключает эту вершину, в результате чего от $s^n$ остается $(n-1)$-мерная грань $s^{n-1}$.

Пусть $s^n$ — некоторый ориентированный симплекс и $s^{n-1}$ — какая-нибудь его ориентированная грань, не содержащая, например, вершину $a_i$ симплекса $s^n$. Пусть порядок вершин $a_{i_0}, a_{i_1}, \ldots, a_{i_{n-1}}$ определяет выбранную ориентацию грани $|s^{n-1}|$. Порядок

$$a_i, \alpha_{i_0}, a_{i_1}, \ldots, a_{i_{n-1}}$$

всех вершин симплекса $|s^n|$ определяет либо избранную ориентацию $s^n$, либо ориентацию $-s^n$. В первом случае *коэффициент инцидентности* $(s^n : s^{n-1})$ будем считать равным $+1$, во втором случае — равным $-1$. Если $s^{n-1}$ не грань $s^n$, то считают $(s^n : s^{n-1}) = 0$.

*Граница* $\Delta s^n$ ориентированного симплекса $s^n$ определяется как формальная сумма всех ориентированных граней $s_i^{n-1}$ симплекса $s^n$, в которой в качестве весовых коэффициентов используются коэффициенты инцидентности, т. е.

$$\Delta s^n = \sum_{i=0}^{n} (s^n : s_i^{n-1})\, s_i^{n-1}.$$

Если договориться, что ориентации граней выбираются в соответствии с правилом

$$s^n = (a_0 a_1 \ldots a_n), \qquad s_i^{n-1} = (a_0 a_1 \ldots \hat{a}_i \ldots a_n),$$

то легко проверить, что

$$\Delta s^n = \sum_{i=0}^{n} (-1)\, s_i^{n-1}.$$

Граница симплекса — частный случай более общего понятия цепи: *r-мерная цепь* $x^r$ комплекса $K$ определяется как формальная сумма

$$x^r = \sum_i \alpha_i s_i^r, \tag{4.1}$$

где $\alpha_i$ — целочисленные коэффициенты.

Если в множестве всех цепей комплекса $K$ ввести операцию сложения цепей (как линейных форм), то это множество становится группой и обозначается $L_r(K)$.

Граница цепи (4.1) определяется по формуле

$$\Delta x^r = \sum_i \alpha_i \Delta s_i^r$$

и является, таким образом, $(r-1)$-мерной цепью.

## § 5. Циклы, границы, гомологии

Любая цепь $x^r$, граница которой равна нулю ($\Delta x^r = 0$), называется *циклом*. Множество $r$-мерных циклов — подгруппа группы $L_r(K)$; обозначается $Z_r(K)$. Другими словами, можно сказать, что $Z_r(K)$ — ядро гомоморфизма

$$\Delta : L_r(K) \to L_{r-1}(K),$$

т. е. $Z_r(K) = \ker \Delta$.

В *группе циклов* $Z_r(K)$ можно выделить *подгруппу $r$-мерных границ* $B_r(K)$, т. е. множество $r$-мерных цепей, являющихся границами некоторых $(r+1)$-мерных цепей. Чтобы проверить, что $B_r(K)$ действительно является подгруппой $Z_r(K)$, достаточно установить, что для любой цепи $x^r$

$$\Delta\Delta x^r = 0 \tag{5.1}$$

(так как ядро любого гомоморфизма $\varphi : G \to H$ — подгруппа $G$).

Поскольку оператор $\Delta$ линеен, (5.1) достаточно проверить в случае, когда $x^r$ представляет собой некоторый симплекс $s^r = (a_0 a_1 \ldots a_r)$:

$$\Delta\Delta s^r = \Delta \left[ \sum_i (-1)^i (a_0 \ldots \hat{a}_i \ldots a_r) \right] =$$

$$= \sum_i (-1)^i \left[ \sum_{j<i} (-1)^j (a_0 \ldots \hat{a}_j \ldots \hat{a}_i \ldots a_r) + \right.$$

$$\left. + \sum_{j>i} (-1)^{j-1} (a_0 \ldots \hat{a}_i \ldots \hat{a}_j \ldots a_r) \right].$$

Легко видеть, что $(a_0 \ldots \hat{a}_i \ldots \hat{a}_j \ldots a_r)$ здесь входит в сумму дважды: один раз с коэффициентом $(-1)^{i+j}$, другой раз с коэффициентом $(-1)^{i+j-1}$. Следовательно, $\Delta\Delta s^r = 0$ для любого симплекса $s^r$, а значит, $\Delta\Delta x^r = 0$ для любой цепи $x^r$.

Фактор-группа $H_r(K) = Z_r(K)/B_r(K)$ группы циклов $Z_r(K)$ по подгруппе границ $B_r(K)$ называется *$r$-й группой гомологий комплекса* $K$. В том случае, когда из контекста ясно, о каком комплексе $K$ идет речь, можно использовать более простые обозначения $H_r$, $Z_r$, $B_r$.

Группы $H_r$, $Z_r$, $B_r$ введены здесь для комплекса $K$, тогда как с топологической точки зрения основной интерес представляет изучение самого полиэдра $|K|$. На простых примерах легко видеть, что группы $Z_r$, $B_r$ при измельчении триангуляции полиэдра $|K|$ разрастаются (в смысле повышения рангов), но эти изменения в группах $Z_r$ и $B_r$ оказываются тесно связанными, и фактор-группа $H_r = Z_r/B_r$ не меняется. Это наблюдение обнаруживает на самом деле общее правило, являющееся одним из основных результатов теории гомологий.

Теорема 5.1. *Группа $H_r$ не зависит от триангуляции полиэдра, а определяется самим этим полиэдром. Гомеоморфные полиэдры имеют одинаковые (изоморфные) группы гомологий.* ▲

Доказательство этой теоремы в техническом отношении довольно сложно, и мы на нем не останавливаемся. Однако в следующем параграфе приведены рассуждения, позволяющие «почувствовать» геометрическую природу этого результата.

Важность приведенной теоремы заключается в том, что она позволяет проводить вычисление групп гомологий на основе выбора произвольной триангуляции (наиболее простой и удобной в данной ситуации).

Нетрудно видеть, что целая серия понятий (симплекс, комплекс, ориентация и т. д.) представляет собой не более чем технический прием для введения групп гомологий. Значительным достижением топологии явилось обобщение этой техники с произвольных (криволинейных) полиэдров на случай произвольных топологических компактов. Помимо определенных здесь симплициальных групп гомологий в топологии используются различные другие группы гомологий (сингулярные гомологии, гомологии Виеториса, Чеха и др.). На классе полиэдров все эти разновидности групп гомологий совпадают между собой. Для всех разновидностей групп гомологий остается справедливой теорема 5.1, соответственно с заменой в ее формулировке криволинейного полиэдра на нечто более общее (как правило, метрический или топологический компакт). Более того, изоморфизм групп гомологий имеет место в более общей ситуации.

Теорема 5.2. *Гомотопически эквивалентные* компакты имеют изоморфные группы гомологий.* ▲

Из теоремы 5.2 сразу следует, что все группы гомологий $H_r$ $(r \geqslant 1)$ стягиваемого компакта тривиальны (состоят из одного нулевого элемента, $H_r = 0$), так как стягиваемое пространство гомотопически эквивалентно одноточечному пространству (тривиальность групп гомологий которого очевидна). Компакт, группы гомологий $H_r$ $(r \geqslant 1)$ которого тривиальны, называется *ацикличным*. Таким образом, *стягиваемый компакт всегда ацикличен.*

Группа $H_0$ всегда представляет собой свободную абелеву группу, ранг которой совпадает с числом компонент (связно-

---

* См. § 8 в главе II.

сти) рассматриваемого полиэдра (или компакта). Если полиэдр $|K|$ связен, то $H_0=Z$, где $Z$ — группа целых чисел (в том числе и отрицательных) по сложению.

## § 6. Что же такое группы гомологий?

Вообще говоря, после того как дано формальное определение групп гомологий, поставленный выше вопрос может вызвать недоумение. Однако мы здесь имеем в виду не уточнение или видоизменение определений, а попытку дать качественно наглядное представление о гомологиях.

Будем говорить для наглядности о группе $H_1$ некоторого криволинейного полиэдра $P$, например тора (который представляет собой поверхность бублика). Одномерные циклы $x^1$ на $P$ — не что иное, как замкнутые ориентированные (с заданным направлением обхода) кривые. Такие кривые (циклы) будем разделять на те, которые ограничивают некоторую область (цикл $z$ на рис. 9), и те, которые никакой области не ограничивают, т. е. не принадлежат группе границ (меридиан и параллель тора на рис. 9). Обратим внимание, что цикл, изображенный на рис. 10 (равный сумме циклов $x_1^1$ и $x_2^1$), ограничивает «область» $A+2B+C$, в которую кусок $B$ входит дважды. Поэтому, если говорить точнее, то надо сказать, что все циклы мы

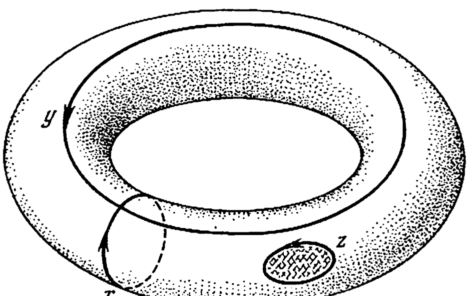



**Рис. 9**

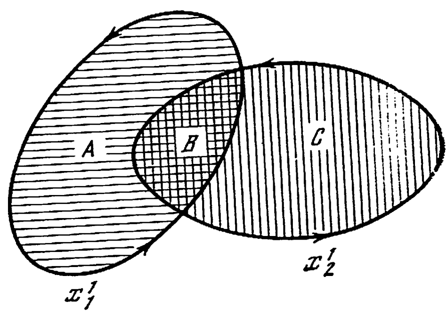



**Рис. 10**

разделяем на те, которые являются границами некоторых двумерных цепей (а не областей в обычном понимании этого слова), и те, которые границами не являются.

Будем все ограничивающие циклы считать несущественными, а все остальные («существенные») циклы разобьем на классы, относя к одному классу *гомологичные циклы*. Циклы $x_1$ и $x_2$ называются гомологичными, если их разность $x_1—x_2$ — ограничивающий цикл (*цикл, гомологичный нулю*). Легко видеть, например, что два различных меридиана тора с одинаковой ориентацией гомологичны друг другу.

Эти классы (называемые классами гомологий) и являются элементами группы гомологий $H_1$. На торе имеется бесконечно много классов гомологий, но все они выражаются через два класса, например класс меридианов $x_m$ и класс параллелей $x_p$. Если цикл $x$ обходит тор $\alpha$ раз по меридиану и $\beta$ раз по параллели, то можно написать $x=\alpha x_m+\beta x_p$. Следовательно, классы (элементы) $x_m$ и $x_p$ — образующие группы $H_1$, а сама группа представляет собой прямую сумму $Z+Z$.

Если рассмотреть (двумерную) сферу $S^2$, то ее группа гомологий $H_1$ тривиальна (состоит из единственного, нулевого, класса гомологий, так как все одномерные циклы на $S^2$ гомологичны между собой).

Для вычисления группы гомологий $H_2$ надо рассматривать двумерные циклы, представляющие собой замкнутые поверхности (очевидно, например, что группа $H_2$ сферы $S^2$ изоморфна группе $Z$). При дальнейшем увеличении размерности наглядность теряется, и здесь более удобным оказывается формальный язык симплициальных разбиений.

## § 7. Ориентируемые псевдомногообразия

Комплекс $K$ размерности $n$ называется *n-мерным (комбинаторным) псевдомногообразием*, если он сильно связен*, и каждый $(n-1)$-мерный симплекс этого комплекса — грань двух и только двух $n$-мерных симплексов комплекса $K$.

Пусть $s_i^n$ и $s_j^n$ — $n$-мерные симплексы $n$-мерного псевдомногообразия $K^n$, имеющие общую грань $s_{ij}^{n-1}$. Ориентации симплексов $s_i^n$, $s_j^n$ называются *когерентными*, если

$$(s_i^n : s_{ij}^{n-1}) = -(s_j^n : s_{ij}^{n-1}).$$

Легко проверить, что это определение не зависит от выбора ориентации грани $|s_{ij}^{n-1}|$.

*Псевдомногообразие* $K^n$ называется *ориентируемым*, если ориентации всех его (граничащих друг с другом) $n$-мерных симплексов могут быть выбраны когерентными.

Легко видеть, что задание ориентации любого симплекса $s_0^n$ ориентируемого псевдомногообразия $K^n$ однозначно определяет когерентные ориентации всех остальных симплексов $s^n \in K^n$ (и вообще всех симплексов $s^r \in K$, $r \leqslant n$, что вытекает из сильной связности $K^n$).

---

* $n$-мерный комплекс $K$ называется сильно связным, если он удовлетворяет следующим условиям: 1) любой симплекс $s^r \in K$, $r<n$ представляет собой грань некоторого симплекса $s^n \in K$ и 2) если комплекс $K$ представим в виде объединения подкомплексов $K_1$ и $K_2$, то размерность $K_1 \cap K_2$ не меньше $n-1$.

Теорема 7.1. *Ориентации всех $n$-мерных симплексов ориентируемого псевдомногообразия $K^n$*

$$s_1^n, \ldots, s_k^n$$

*когерентны тогда и только тогда, когда цепь*

$$z^n = \sum_{i=1}^{k} s_i^n \tag{7.1}$$

— *цикл.* Это очевидно ввиду

$$\Delta z^n = \sum_{i,j} [(s_i^n : s_{ij}^{n-1}) + (s_j^n : s_{ij}^{n-1})]\, s_{ij}^{n-1}. \ \blacktriangle$$

Цикл (7.1) называется ориентацией $K^n$. Очевидно, $K^n$ имеет две ориентации: $z^n$ и $-z^n$.

Теорема 7.2. *Группа гомологий $H_n$ ориентируемого псевдомногообразия $K^n$ изоморфна группе $Z$ (целых чисел по сложению).*

Доказательство. Ясно, что группа $n$-мерных границ $K^n$ тривиальна (нулевая), так как в $K^n$ отсутствуют $(n+1)$-мерные цепи. Поэтому группа гомологий $H_n$ в данном случае совпадает с группой $n$-мерных циклов, и теорема очевидным образом будет доказана, если показать, что любой цикл $x^n$ имеет вид $x^n = \alpha z^n$, где $\alpha \in Z$, а $z^n$ определяется соотношением (7.1).

Рассмотрим произвольную цепь

$$x^n = \sum_i a_i s_i^n.$$

Очевидно,

$$\Delta x^n = \sum_{i,j} [a_i (s_i^n : s_{ij}^{n-1}) + a_j (s_j^n : s_{ij}^{n-1})]\, s_{ij}^{n-1},$$

поэтому, чтобы цепь $x^n$ была циклом, необходимо и достаточно $a_i = a_j$ для всех $i, j$. $\blacktriangle$

Примером ориентируемого псевдомногообразия может служить *край* $n$-мерного симплекса $s^n$ [т. е. $(n-1)$-мерный комплекс $K$, состоящий из всех граней $s_i^{n-1}$ симплекса $s^n$]. Ориентировать $K$ можно, выбрав ориентации граней $s_i^{n-1}$ так, чтобы $(s^n : s_i^{n-1}) = 1$ для всех $i$.

Из теоремы 7.2 вытекает, что группа гомологий $H_{n-1}$ края симплекса $s^n$ изоморфна группе $Z$. Сфера $S^{n-1}$ — криволинейный полиэдр, гомеоморфный краю симплекса $s^n$ (гомеоморфизм легко осуществляется центральным проектированием). Поэтому *группа гомологий $H_{n-1}$ сферы $S^{n-1}$ также изоморфна группе $Z$.*

## § 8. Симплициальные отображения и симплициальные приближения

Пусть имеется некоторое преобразование $\varphi$ вершин симплекса $s^p=(a_0a_1\dots a_p)$ в вершины симплекса $s^q=(b_0b_1\dots b_q)$, что можно записать так:

$$\varphi(a_i)=b_{i(\varphi)}.$$

Преобразованию $\varphi$ сопоставим линейное отображение $\tilde{\varphi}:|s^p|\to|s^q|$, определяемое следующим образом:

$$\tilde{\varphi}\left(\sum_i \lambda_i a_i\right)=\sum_j \mu_j b_j, \text{ где } \mu_j=\sum_{i(\varphi)=j}\lambda_i.$$

Рассмотрим теперь некоторое преобразование $\varphi$ вершин комплекса $K$ в вершины комплекса $L$, удовлетворяющее условию: если точки $a_0, a_1, \dots, a_p$ определяют некоторый симплекс из $K$, то на $\varphi(a_0), \varphi(a_1), \dots, \varphi(a_p)$ натянут некоторый симплекс из $L$ [конечно, среди вершин $\varphi(a_0), \varphi(a_1), \dots, \varphi(a_p)$ могут быть повторяющиеся].

Преобразование $\varphi$ определяет отображение $\tilde{\varphi}:|K|\to|L|$, линейное на каждом симплексе из $K$. Это отображение называется *симплициальным отображением*, часто обозначается $\varphi:K\to L$.

Два обычных непрерывных отображения $f:|K|\to|L|$ и $g:|K|\to|L|$ назовем *$L$-близкими*, если для каждого $x\in|K|$ можно указать такой симплекс $s(x)\in L$, что $f(x)$ и $g(x)$ принадлежат $s(x)$.

*Если отображения $f, g:|K|\to|L|$ $L$-близки, то они гомотопны.* Действительно,

$$H(x,\tau)=\tau f(x)+(1-\tau)g(x),$$

очевидно, гомотопический мост.

Если непрерывное отображение $f:|K|\to|L|$ и симплициальное отображение $\varphi:K\to L$ таковы, что для каждого $x\in|K|$ точка $\tilde{\varphi}(x)$ принадлежит замыканию носителя точки $f(x)$ [т. е. «наименьшему» симплексу $s\in K$, содержащему $f(x)$], то $\varphi$ называется *симплициальным приближением отображения $f$*.

Из определения сразу следует, что $f$ и его симплициальное приближение $\varphi$ всегда гомотопны, так как они заведомо $L$-близки.

Теорема 8.1. *У всякого непрерывного отображения $f:|K|\to|L|$ существует симплициальное приближение.* ▲

Содержание приведенного утверждения нужно уточнить. Здесь имеется возможность так триангулировать полиэдр $|K|$, что для некоторой триангуляции $K'$ полиэдра $|K|$ будет существовать симплициальное приближение $\varphi:K'\to L$ отображения $f$. В идейном отношении доказательство достаточно просто, но технически громоздко. Нужная триангуляция полиэдра $|K|$ получается многократным (так называемым) барицентрическим подразделением комплекса $K$. Идея построения симплициального приближения $\varphi$ также прозрачна.

## § 9. Индуцируемые гомоморфизмы

Пусть имеется симплиционное отображение $\varphi$ комплекса $K_\alpha$ в комплекс $K_\beta$. Введем с помощью $\varphi$ гомоморфизм $\varphi_{*r}$ группы $L_r(K_\alpha)$ в группу $L_r(K_\beta)$, полагая

$$\varphi_{*r}(s_\alpha^r) = (\varphi(a_0) \ldots \varphi(a_r))$$

(где $s_\alpha^r = (a_0 a_1 \ldots a_r)$), если вершины $\varphi(a_0), \ldots, \varphi(a_r)$ различны, и $\varphi_{*r}(s_\alpha^r) = 0$ [где 0 — нуль группы $L_r(K_\beta)$] в противном случае. На цепи $\varphi_{*r}$ распространяется линейно, т. е.

$$\varphi_{*r}(x_\alpha^r) = \sum_i \gamma_i \varphi_{*r}(s_i^r), \qquad \text{где } x_\alpha^r = \sum_i \gamma_i s_{\alpha i}^r.$$

Легко проверяется, что гомоморфизм $\varphi_{*r}$ коммутирует с граничным оператором $\Delta$, т. е. для любой цепи $x^r \in L_r(K_\alpha)$

$$\varphi_{*r}(\Delta x^r) = \Delta\varphi_{*r}(x^r);$$

отсюда сразу следует, что гомоморфизм $\varphi_{*r}$ переводит циклы в циклы, границы — в границы, а значит, и группу гомологий $H_r(K_\alpha)$ — в группу гомологий $H_r(K_\beta)$.

Гомоморфизм $\varphi_{*r}$ называется *гомоморфизмом, индуцируемым (порожденным) симплициальным отображением* $\varphi$. На самом деле каждое симплициальное отображение $\varphi$ индуцирует целый набор гомоморфизмов $\varphi_{*r}$, где индекс $r$ указывает размерность групп гомологий.

С каждым непрерывным отображением $f: |K| \to |L|$ можно теперь связать набор гомоморфизмов

$$f_{*i}: H_i(K) \to H_i(L),$$

индуцируемых некоторым симплициальным приближением отображения $f$. Можно показать корректность такого определения, т. е. независимость гомоморфизмов $f_{*i}$ от выбора того или иного симплициального приближения $f$. Более того, справедлив следующий результат.

Теорема 9.1. *Гомоморфизмы $f_{*i}$, $g_{*i}$ гомотопных отображений $f, g: |K| \to |L|$ совпадают.* ▲

Гомоморфизмы $E_{*i}$ тождественного отображения $E: |K| \to |K|$, очевидно, являются изоморфизмами.

## § 10. Степень отображения

Пусть имеется некоторое непрерывное отображение $f: |K_\alpha| \to |K_\beta|$, где $K_\alpha$ и $K_\beta$ — ориентируемые $n$-мерные псевдомногообразия, например $n$-мерные сферы.

В § 7 было показано, что

$$H_n(K_\alpha)=H_n(K_\beta)=Z,$$

причем образующими групп $H_n(K_\alpha)$, $H_n(K_\beta)$ являются соответственно элементы

$$z_\alpha^n=\sum_i s_{\alpha i}^n, \qquad z_\beta^n=\sum_i s_{\beta i}^n.$$

Так как $f_{*n}z_\alpha^n\in H_n(K_\beta)$, то

$$f_{*n}z_\alpha^n=\gamma z_\beta^n,$$

где $\gamma$ — некоторое целое число. Это число $\gamma$ и называется *степенью отображения* $f$.

Остановимся на элементарном приложении понятия степени отображения. Пусть имеется некоторое отображение $f$ $(n-1)$-мерной $(n>1)$ сферы $S^{n-1}$ (ограничивающей шар $B^n$) в себя, степень которого отлична от нуля. Покажем, что это отображение не может быть продолжено на шар $B^n$ (о задаче продолжения см. § 8 главы II).

Так как шар $B^n$ стягиваем, то его группа гомологий $H_{n-1}(B^n)$ тривиальна, а группа гомологий $H_{n-1}(S^{n-1})$ изоморфна группе $Z$ (см. § 7), т. е.

$$H_{n-1}(B^n)=0, \qquad H_{n-1}(S^{n-1})=Z.$$

Предположим, что отображение $f$ продолжимо на $B^n$ и $g:B^n\to S^{n-1}$ — его продолжение. Пусть

$$h_{*(n-1)}:H_{n-1}(S^{n-1})\to H_{n-1}(B^n)$$

— гомоморфизм, индуцированный отображением вложения $h:S^{n-1}\subset B^n$. Так как $H_{n-1}(B^n)=0$, то, очевидно, гомоморфизм $h_{*(n-1)}$ — нулевой. Поэтому $g_{*(n-1)}h_{*(n-1)}=0$. С другой стороны,

$$g_{*(n-1)}h_{*(n-1)}=f_{*(n-1)}$$

и $f_{*(n-1)}\neq 0$, так как степень отображения $f$ отлична от нуля. Полученное противоречие завершает доказательство.

Пусть теперь имеется некоторое непрерывное отображение $F:B^n\to R^n$ единичного шара (с центром в нуле) $B^n$ в $n$-мерное пространство $R^n$ и мы интересуемся существованием решения $x\in B^n$ уравнения $F(x)=0$. Пусть векторное поле $F(x)$ невырожденно на $S^{n-1}$, т. е. $F(x)\neq 0$ при любом $x\in S^{n-1}$. В этом случае определено отображение

$$f(x)=F(x)/\|F(x)\|, \quad x\in S^{n-1} \tag{10.1}$$

сферы $S^{n-1}$ в себя. Степень отображения (10.1) называется *вращением векторного поля* $F(x)$ *на* $S^{n-1}$. Пусть эта степень отлична от нуля; тогда уравнение $F(x)=0$ заведомо имеет решение $x\in B^n$. В противном случае отображение $F(x)/\|F(x)\|$, $x\in B^n$ будет продолжением отображения (10.1) на $B^n$, что невозможно.

Дополнение второе

# МНОГОЗНАЧНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

Основная цель последующего изложения — описание серии теорем о неподвижных точках многозначных (точечно-множественных) отображений и применение этих результатов к изучению задач статики (существование равновесия, оптимума, седловой точки и т. д.). Нужно отметить, что в исходной постановке таких задач многозначные отображения, как правило, отсутствуют, и переформулировка задач статики на язык многозначных отображений является своеобразным техническим приемом, который часто позволяет дать эффективное решение. В подобной ситуации обычно ориентируются на использование широко известной теоремы Какутани (замкнутое многозначное отображение с выпуклыми образами, отображающее шар $B$ в себя, имеет неподвижную точку $x^* \in B$). Здесь описаны более мощные топологические методы, по отношению к которым теорема Какутани занимает то же место, что и теорема Брауэра по отношению к методам, изложенным в главе II.

## § 1. Общие сведения о многозначных отображениях

*Многозначным* (*точечно-множественным*) *отображением* $T: X \to 2^Y$ (через $2^Y$ обозначается множество всех подмножеств множества $Y$) называется оператор, сопоставляющий каждому элементу $x \in X$ некоторое непустое подмножество множества $Y$, т. е. $T(x) \subset Y$ [или $T(x) \in 2^Y$] для любого $x \in X$.

Везде далее под $X$ подразумевается некоторое подмножество $R^n$, причем считается, что метрика в $X$ порождена (произвольной) нормой $R^n$. Кроме того, если не оговорено противное, считается $Y = R^n$. Наконец, рассматриваются лишь *ограниченные* отображения $T: X \to 2^Y$, которые каждое ограниченное множество $A \subset X$ переводят в ограниченное множество $B \subset Y$:

$$B = \{y \mid y \in T(x),\ x \in A\} = \bigcup \{T(x) : x \in A\}.$$

Многозначное отображение $T: X \to 2^Y$ будем называть *замкнутым* (или *полунепрерывным сверху*), если график этого отображения замкнут в $X \times Y$, т. е. в $X \times Y$ замкнуто множество *

* Данное определение полунепрерывности отображения сверху наиболее распространено. Наряду с ним встречается иное определение: многозначное

$$Z = \{(x, y) \in X \times Y \mid x \in X,\ y \in T(x)\}. \tag{1.1}$$

Равносильное определение замкнутости отображения: если $x_k \to x$, $y_k \in T(x_k)$, $y_k \to y$, то $y \in T(x)$.

Многозначное отображение $T: X \to 2^Y$ называется *полунепрерывным снизу*, если для любых точек $x \in X$ и $y \in T(x)$ и любой последовательности $x_k \to x$ (все $x_k \in X$) найдется такая последовательность $y_k$, что $y_k \in T(x_k)$ и $y_k \to y$.

Для уяснения разницы между полунепрерывными снизу и сверху отображениями полезно рассмотреть несколько примеров. Мы ограничимся двумя. Отображение

$$T_1(x) = \begin{cases} [0, 1] & \text{при } x < 0; \\ [0, 2] & \text{при } x \geqslant 0 \end{cases}$$

полунепрерывно сверху, но не снизу.

Отображение

$$T_2(x) = \begin{cases} [0, 1] & \text{при } x \leqslant 0; \\ [0, 2] & \text{при } x > 0 \end{cases}$$

полунепрерывно снизу, но не сверху.

Многозначное отображение одновременно полунепрерывное сверху и снизу называется *непрерывным по Какутани.*

Пусть все образы отображения $T: X \to 2^Y$ компактны. Если через $Y_c$ обозначить множество всех компактных подмножеств множества $Y$, то $T$ можно рассматривать как обычное (однозначное) отображение $T: X \to Y_c$. Если при этом $Y_c$ метризовано с помощью так называемой метрики Хаусдорфа, то о непрерывности $T: X \to Y_c$ можно говорить как о непрерывности однозначного отображения. В этом случае $T$ называется *непрерывным по Хаусдорфу*. Всякое непрерывное по Хаусдорфу отображение непрерывно и по Какутани. Для ограниченных отображений верна также обратная импликация.

## § 2. Примеры

1. Пусть фирма определяет объем выпусков продукции $x = \{x_1, \ldots, x_n\}$ на основе максимизации прибыли

$$\max_x \{yx - \varphi(x)\},$$

где $y = \{y_1, \ldots, y_n\}$ — вектор цен, $\varphi(x)$ — затраты. Здесь может

---

отображение $T: X \to 2^Y$ называется полунепрерывным сверху, если для любого $x \in X$ и любой окрестности $V$ множества-образа $T(x)$ можно указать окрестность $W$ точки $x$ такую, что $T(W) \subset V$, где $T(W) = \bigcup \{T(x) : x \in V\}$.

С точки зрения последнего определения понятия замкнутости и полунепрерывности сверху различаются. О связи между ними см. [56].

возникнуть вопрос о существовании такого вектора цен, при котором некоторый заданный набор выпусков $x_0$ обеспечивает максимум прибыли. Для переформулировки вопроса введем в рассмотрение многозначное отображение *

$$Z(y) = \operatorname{Arg}\max_{x} \{yx - \varphi(x)\}.$$

Ясно, что исходная задача эквивалентна вопросу о существовании решения у включения

$$x^0 \in Z(y),$$

или (после перехода к другому началу отсчета) $0 \in \tilde{Z}(y)$.

2. Пусть имеется игра $N$ лиц с функциями выигрыша $D_i(x_1, \ldots, x_N)$, где $x_i$ — стратегия $i$-го игрока ($x_i \in X_i$, $X_i \subset R^{m_i}$ — компакты). Введем обозначение

$$\psi_i(y_i, x) = D_i(x_1, \ldots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \ldots, x_N).$$

Решением (положением равновесия) игры по Нэшу называется точка $x^*$ такая, что

$$\max_{y_i \in X_i} \psi_i(y_i, x^*) = \psi_i(x_i^*, x^*), \ i = 1, \ldots, N.$$

Рассмотрим многозначные отображения

$$W_i(x) = \operatorname{Arg}\max_{y_i \in X_i} \psi_i(y_i, x)$$

и положим

$$W(x) = W_1(x) \times \ldots \times W_N(x).$$

Очевидно, что вопрос о существовании равновесия по Нэшу эквивалентен вопросу о существовании решения у включения

$$x \in W(x). \tag{2.1}$$

Точку $x^*$, удовлетворяющую (2.1), принято называть неподвижной точкой многозначного отображения $W(x)$.

3. Пусть исполнение некоторого проекта двухуровневой системой характеризуется совокупностью показателей

$$F(x, y) = \{f_1(x, y), \ldots, f_n(x, y)\}, \tag{2.2}$$

где $x, y \in R^n$ — векторы, характеризующие принимаемые решения (или способы действий) соответственно на верхнем и нижнем уровнях.

---

* Здесь Arg max $\varphi(x, y)$ обозначает множество тех $x$, при которых достигается максимум $\varphi(x, y)$.

Предположим, что совокупность показателей (2.2) должна удовлетворять некоторым ограничениям $F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \Omega$. Рассмотрим многозначное отображение

$$V(\boldsymbol{x}) = \{\boldsymbol{y} \mid F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \Omega\}.$$

Пусть $\boldsymbol{y} = 0$ соответствует обычному режиму работы нижнего уровня. Тогда существование решения у включения $0 \in V(\boldsymbol{x})$ означает существование такой системы решений на верхнем уровне, при которой проект удовлетворительно реализуется в нормальном режиме функционирования нижнего уровня.

В более естественной постановке задачи содержательный вопрос здесь звучит несколько по-иному. Во-первых, на нижнем уровне возможно наличие ограничений $\boldsymbol{y} \in Y$, причем множество $Y$ может зависеть от $\boldsymbol{x}$, т. е. $\boldsymbol{y} \in Y(\boldsymbol{x})$. Теперь задачу можно поставить так: существует ли способ действий верхнего уровня $\boldsymbol{x}$, при котором некоторый допустимый режим работы нижнего уровня $\boldsymbol{y} \in Y(\boldsymbol{x})$ обеспечивает удовлетворительную реализацию проекта? Легко понять, что эта задача эквивалентна вопросу о существовании решения у включения $0 \in W(\boldsymbol{x})$, где

$$W(\boldsymbol{x}) = \{\boldsymbol{z} \mid \boldsymbol{z} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{a} \in V(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{b} \in Y(\boldsymbol{x})\}.$$

4. Обратимся к известной задаче о существовании у функции $\varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ седловой точки, которая эквивалентна вопросу о справедливости равенства

$$\min_{\boldsymbol{y} \in Y} \max_{\boldsymbol{x} \in X} \varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \max_{\boldsymbol{x} \in X} \min_{\boldsymbol{y} \in Y} \varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}). \tag{2.3}$$

Напомним, что эта задача играет важную роль в математическом программировании (существование седловой точки у лагранжиана равносильно существованию решения у задачи нелинейного программирования), теории игр и вообще теории минимаксных задач.

Стандартный путь доказательства равенства (2.3) состоит в следующем. Вводятся два многозначных отображения

$$U(\boldsymbol{x}) = \operatorname{Arg} \min_{\boldsymbol{y} \in Y} \varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}); \quad V(\boldsymbol{x}) = \operatorname{Arg} \max_{\boldsymbol{x} \in X} \varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}).$$

Теперь из существования неподвижной точки у отображения $U(\boldsymbol{x}) \times V(\boldsymbol{y})$ следует (2.3). Действительно, пусть

$$(\boldsymbol{y}^*, \boldsymbol{x}^*) \in U(\boldsymbol{x}^*) \times V(\boldsymbol{y}^*);$$

это означает, что

$$\min_{\boldsymbol{y} \in Y} \varphi(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}) = \varphi(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}^*) = \max_{\boldsymbol{x} \in X} \varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}^*);$$

отсюда

$$\min_{\boldsymbol{y} \in Y} \max_{\boldsymbol{x} \in X} \varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \leqslant \max_{\boldsymbol{x} \in X} \varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}^*) = \varphi(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}^*) =$$
$$= \min_{\boldsymbol{y} \in Y} \varphi(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}) \leqslant \max_{\boldsymbol{x} \in X} \min_{\boldsymbol{y} \in Y} \varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}).$$

Но справедливость обратного неравенства очевидна, поэтому (2.3) доказано (конечно, при условии существования неподвижной точки у отображения $U \times V$).

5. Рассмотрим рыночную модель. Пусть $x_i$ — цена $i$-го товара, $\delta_i(\boldsymbol{x})$ — избыточный спрос на него. Будем продполагать, что при любом наборе цен выполняются балансовые соотношения (закон Вальраса)

$$\sum_{i=1}^{n} \delta_i(\boldsymbol{x}) x_i = 0. \tag{2.4}$$

Набор цен $\boldsymbol{x}^*$ называется равновесным, если $\forall i : \delta_i(\boldsymbol{x}^*) \leqslant 0$, причем $x_j^* = 0$, если $\delta_j(\boldsymbol{x}^*) < 0$.

Допустим, рыночное равновесие не существует, т. е. для любого $\boldsymbol{x}$ найдется номер $j$ такой, что $\delta_j(\boldsymbol{x}) > 0$. Определим многозначное отображение $W(\boldsymbol{x})$ следующим образом. Пусть

$$S = \left\{ \boldsymbol{x} \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} x_i = 1, \ \forall i : x_i \geqslant 0 \right\}.$$

Отображение $W(\boldsymbol{x})$ точке $\boldsymbol{x} \in S$ сопоставляет множество точек $\boldsymbol{y} \in S$ таких, что

$$\sum_{i=1}^{n} \delta_i(\boldsymbol{x}) y_i \geqslant \varepsilon > 0.$$

Если отображение $W$ имеет неподвижную точку* $\boldsymbol{x}^0$, то

$$\sum_{i=1}^{n} \delta_i(\boldsymbol{x}^0) x_i^0 \geqslant \varepsilon > 0,$$

но это противоречит (2.4). Таким образом, существует точка $\boldsymbol{x}^* \in S$, в которой $\forall i : \delta_i(\boldsymbol{x}^*) \leqslant 0$, при этом $\delta_j(\boldsymbol{x}^*) < 0 \Rightarrow x_j = 0$ следует из (2.4).

В приведенных примерах не уточнялись детали. Нашей целью было лишь обратить внимание на некоторые способы редукции задач статики к задаче о существовании неподвижной точки у многозначного отображения или же о существовании нуля у многозначного векторного поля [т. е. о существовании решения у включения $0 \in U(\boldsymbol{x})$]. При этом важно отметить, что такая редукция имеет в большинстве случаев естественный характер, а трактовка соответствующих задач на языке многозначных отображений часто представляется едва ли не единственным выходом из положения.

---

* Отображение $W$ здесь действительно имеет неподвижную точку, если $\varepsilon$ достаточно мало, а функции $\delta_i(\ )$ непрерывны. Ее существование вытекает из теоремы Какутани [непустота образов $W(x)$ (при достаточно малом $\varepsilon$), их выпуклость и замкнутость $W(\ $ очевидны].

## § 3. Неподвижные точки многозначных отображений с выпуклыми образами

Здесь пойдет речь исключительно об отображениях $T: X \to 2^Y$, которые каждому $x \in X$ сопоставляют выпуклое множество $T(x) \subset Y$. Кроме того, будем предполагать, что $X$ также выпукло. Хотя многие теоремы параграфа остаются справедливыми без этих предположений, представляется целесообразным рассмотреть случай многозначных отображений с выпуклыми образами отдельно, так как именно к такому случаю приводит большинство прикладных задач. Это представляется тем более целесообразным, что отдельные общие результаты в предположении выпуклости образов могут быть усилены.

Итак, пусть $X$ — замыкание ограниченной (и, как уже отмечалось, выпуклой) области с границей $\Gamma$. Многозначное отображение $T(x)$ будем называть также многозначным векторным полем, а точку $x$, в которой $0 \in T(x)$,— нулем многозначного векторного поля [или неподвижной точкой многозначного векторного поля (но не отображения)]. Поле $T(x)$ назовем невырожденным на $\Gamma$, если оно не имеет нулей на $\Gamma$, т. е. $0 \notin T(x)$ для любого $x \in \Gamma$. Рассматриваемые далее поля, если не оговорено противное, предполагаются невырожденными на $\Gamma$.

Опишем теперь аппроксимационную конструкцию, которая часто применяется при доказательстве теоремы Какутани (см., например, [56]). В силу компактности $\Gamma$, при любом $\varepsilon > 0$ в $\Gamma$ существует $\varepsilon$-сеть, которая пусть состоит из точек $x^1, \ldots, x^N$. В каждом множестве $T(x^i)$ фиксируем произвольную точку $y^i \in T(x^i)$. Определим далее $N$ весовых функций

$$\alpha_i(x) = \frac{\theta_i(x)}{\sum\limits_{j=1}^{N} \theta_j(x)},$$

где

$$\theta_i(x) = \max\{0, \varepsilon - \|x - x^i\|\}.$$

Назовем теперь однозначное отображение

$$t(x) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i(x)\, y^i$$

$\varepsilon$-аппроксимацией многозначного отображения $T(x)$.

Определение. Вращением замкнутого* многозначного векторного поля $T(x)$ на $\Gamma$ [которое будем обозначать через $\gamma(T, \Gamma)$] назовем вращение вокторного поля $t(x)$ на $\Gamma$ при достаточно малом $\varepsilon$.

---

* Если не оговорено противное, рассматриваемые далее многозначные отображения считаются замкнутыми.

Можно показать корректность данного определения, т. е. независимость $\gamma(T, \Gamma)$ от $\varepsilon$ (если только оно достаточно мало) и от выбора $\varepsilon$-сети. По-видимому, впервые такое определение вращения многозначного векторного поля (хотя и несколько другим техническим способом) было дано в [7].

В теории неподвижных точек основную роль играет следующий результат.

Теорема 3.1. *Пусть* $\gamma(T, \Gamma)\neq 0$; *тогда существует точка* $x\in X$ *такая, что* $0\in T(x)$. ▲

Для вычисления вращений, как и в случае однозначных отображений, важно понятие гомотопии. Поля $T_1(x)$ и $T_2(x)$ называются гомотопными, если существует замкнутое по совокупности переменных отображение (с выпуклыми образами) $H(x, \tau)$

$$H:\Gamma\times[0, 1]\mapsto 2^{Y}$$

такое, что при любом $\tau\in[0, 1]$ поле $H(x, \tau)$ невырожденно на $\Gamma$, и

$$H(x, 0)=T_1(x), \qquad H(x, 1)=T_2(x) \quad (x\in\Gamma).$$

Роль гомотопии определяется следующей теоремой.

Теорема 3.2. *Гомотопные поля имеют одинаковые вращения.* ▲

Теперь понятно, что далее можно следовать путем, аналогичным тому, который был описан в главе II. Надо определить вращения ряда простых (стандартных) полей, а затем сводить к ним с помощью гомотопии изучаемые поля и далее пользоваться теоремой 3.2. Но в качестве стандартных могут использоваться однозначные поля (частный случай многозначных), вращение которых известно.

Приступим к реализации приведенных соображений.

Теорема 3.3. *Если при любом* $x\in\Gamma$ *произвольные векторы* $y_1\in T_1(x)$, $y_2\in T_2(x)$ *не направлены противоположно, то поля* $T_1(x)$ *и* $T_2(x)$ *гомотопны.*

Доказательство элементарно. Легко проверить, что

$$H(x, \tau)=(1-\tau)T_1(x)+\tau T_2(x)$$

— гомотопический мост *. ▲

Приведем элементарное следствие.

Теорема 3.4 (Какутани). *Пусть (замкнутое) многозначное отображение* $T(x)$ *переводит в себя некоторый замкнутый шар* $B$, *т. е.* $T:B\to 2^{B}$; *тогда у* $T$ *существует неподвижная точка* $x^*\in B$ $(x^*\in T(x^*))$.

---

* Сумма многозначных отображений определяется так:
$U(x)=U_1(x)+U_2(x)=\{x\,|\,x=a+b,\ a\in U_1(x),\ b\in U_2(x)\}$.

Если $U_1(x)$, $U_2(x)$ — замкнутые отображения с выпуклыми образами, то отображение $U_1(x)+U_2(x)$ также замкнуто и имеет выпуклые образы.

Без ограничения общности центр шара $B$ можно считать расположенным в нуле. Предположим противное. Тогда поле $U(x) = x - T(x)$ невырожденно на сфере $S$, ограничивающей шар $B$. Легко видеть, что ни при каком $x \in S$ векторы $x$ и $y \in x - T(x)$ не могут быть противоположно направлены, но тогда (теорема 3.3) поля $E(x) \equiv x$ и $U(x)$ гомотопны. По теореме 3.2 $\gamma(U, S) = \gamma(E, S)$. Но $\gamma(E, S) = 1$. Следовательно (теорема 3.1), поле $U(x)$ имеет ноль на $B$, что противоречит предположению. ▲

Обратим внимание, что схема доказательства здесь полностью аналогична схеме доказательства теоремы Брауэра в главе II. Такая аналогия сохраняется и в ряде последующих теорем, которые здесь приводятся без доказательства.

Отметим по ходу ряд элементарных обобщений теоремы Какутани. Легко показать, что теорема 3.4 сохраняет силу, если шар $B$ в ее условиях заменить произвольным множеством $X$, гомеоморфным $B$. Из доказательства также ясно, что важно условие $T(x) \subset B$ лишь для $x \in S$, а не для всех $x \in B$, т. е. шар не обязательно должен переводиться в себя (аналогичное замечание можно сделать по поводу теоремы Брауэра, так как она является частным случаем теоремы Какутани). Более того, справедлив следующий результат.

Теорема 3.5. *Пусть*

*$T(x) \cap X \neq \varnothing$ при любом $x \in \Gamma$; тогда многозначное отображение $T(x)$ имеет неподвижную точку $x^* \in X$.*

Действительно, если поле $x - T(x)$ невырожденно на $\Gamma$, то оно гомотопно полю $x - T(x) \cap X$, вращение которого равно 1. ▲

Простое использование теоремы 3.3 (и, конечно, теорем 3.1, 3.2) позволяет легко установить справедливость следующих результатов *.

Теорема 3.6. *Пусть* $0 \in \operatorname{int} X$ *и*

$$\forall x \in \Gamma,\ y \in T(x): (y, x) \geqslant 0;$$

*тогда существует вектор $x^* \in X$ такой, что $0 \in T(x^*)$.* ▲

Теорема 3.7. *Пусть* $0 \in \operatorname{int} X$ *и*

$$\forall x \in \Gamma,\ y \in T(x): (y, x) \geqslant (x, x);$$

*тогда многозначное отображение $T(x)$ имеет неподвижную точку $x^* \in X$.* ▲

Теорема 3.8. *Пусть $0 \in \operatorname{int} X$ и для любых $x \in \Gamma$, $y \in T(x)$ существует индекс $i$ такой, что $x_i y_i > 0$; тогда существует вектор $x^* \in X$ такой, что $0 \in T(x^*)$.* ▲

Теорема 3.9. *Пусть* $0 \in \operatorname{int} X$ *и*

$$\forall x \in \Gamma,\ y \in T(x): y \neq \lambda x$$

---

* Требование выпуклости $X$ в теоремах 3.6—3.10 можно опустить.

*ни при каком* $\lambda > 1$; *тогда многозначное отображение* $T(x)$ *имеет неподвижную точку* $x^* \in X$. ▲

Теорема 3.10 (типа Руше). *Пусть* $0 \in \operatorname{int} X$, *вращение поля* $U(x)$ *на* $\Gamma$ *отлично от нуля и*

$$\forall x \in \Gamma: \max_{y \in V(x)} \|y\| < \max_{z \in U(x)} \|z\|;$$

*тогда поле* $U(x) + V(x)$ *имеет нуль в* $X$, *т. е. существует вектор* $x^* \in X$ *такой, что* $0 \in U(x^*) + V(x^*)$. ▲

Аналогию с однозначными отображениями можно было бы продолжить. Так, например, легко доказать аналоги теорем о существовании у многозначных отображений собственных векторов, т. е. о разрешимости включений $\lambda x \in T(x)$ при некотором $\lambda \in (-\infty, \infty)$. Для многозначных отображений справедлива также теорема об алгебраическом числе неподвижных элементов поля, аналогичная теореме об алгебраическом числе нулей однозначного векторного поля. Под неподвижными элементами в данном случае понимаются связные множества нулей многозначного векторного поля, и речь идет о случае изолированных неподвижных элементов (имеющих непересекающиеся окрестности).

Во всех предыдущих теоремах, как и в самом определении вращения многозначного векторного поля, многозначные отображения считались замкнутыми. Тем не менее теория вращения многозначных полей с приложениями к неподвижным точкам легко может быть развита и для многозначных отображений, полунепрерывных снизу, не обязательно замкнутых *. В основу здесь могут быть положены результаты Майкла [99] о непрерывных селекторах. В данном контексте достаточно ограничиться следующим результатом, вытекающим из [99].

Теорема 3.11. *Многозначное отображение* $T: X \to Y$, *полунепрерывное снизу, имеет непрерывный селектор* $t(x)$, *т. е. существует однозначная непрерывная функция* $t: X \to Y$ *такая, что*

$$\forall x \in X: t(x) \in T(x). \blacktriangle \tag{3.1}$$

Ясно, что вращение $T(x)$ теперь можно определять через вращение селектора и далее следовать проторенным путем. Пусть, например, $T(x)$ полунепрерывно снизу и отображает $X$ в себя. Из теоремы 3.11 вытекает существование селектора $t(x)$. При этом понятно, что $t(x)$ также отображает $X$ в себя и по теореме Брауэра имеет неподвижную точку $x^*$. Но тогда в силу (3.1) $x^*$ будет неподвижной точкой $T(x)$. Сформулируем этот результат в виде самостоятельной теоремы.

* Насколько известно автору, на этот факт в литературе не обращалось внимания. Правда, нужно отметить, что случай замкнутых отображений с точки зрения приложений, по-видимому, более важен. По крайней мере большинство прикладных задач приводит именно к замкнутым отображениям.

Теорема 3.12. *Полунепрерывное снизу многозначное отображение $T(x)$, переводящее $X$ в себя, имеет неподвижную точку.* ▲

Переформулировку других теорем настоящего раздела для полунепрерывных снизу отображений предоставляем читателю.

## § 4. Многозначные отображения с невыпуклыми образами

Понятно, что если предположение о выпуклости образов в теореме Какутани (и вообще в теории вращения многозначных полей) не существенно, то какие-то предположения о структуре образов безусловно необходимы. Чтобы убедиться в этом, достаточно рассмотреть многозначное отображение

$$T(x) = \begin{cases} 2 \text{ при } x \in [0, 1]; \\ 0 \text{ при } x \in [1,2] \end{cases}$$

отрезка [0, 2] в себя, не имеющее неподвижной точки (образ точки $x=1$ невыпуклый).

Геометрическая интуиция подсказывает, что по крайней мере надо сохранить предположение о стягиваемости образов. Хотя это и не обязательно (о чем сказано далее), но такое предположение (в некоторых случаях с оговорками) действительно может эффективно заменять предположение о выпуклости образов.

В исследованиях по неподвижным точкам многозначных отображений к настоящему времени наметилось два подхода. Один из них, аппроксимативный [10, 17, 19, 54], основан на идее, описанной в предыдущем параграфе. Здесь, как правило (за исключением более частных исследований, использующих предположение о выпуклости образов [7, 8]), предполагается асферичность образов во всех размерностях *. При некоторых ограничениях (несущественных для прикладных задач) асферичность отображения влечет за собой стягиваемость.

Развитая в [19] теория вращения многозначных полей оставляет теоремы 3.1 и 3.2 справедливыми в случае асферичных отображений. Понятно, что тогда теоремы 3.3, 3.4, 3.6—3.10 также остаются справедливыми. Заметим, что при определении гомотопии полей здесь появляется дополнительное требование асферичности отображения $H(x, \tau)$ при любом $\tau \in [0, 1]$.

Второй подход естественно назвать гомологическим (см. работы [9, 87] и ряд других). Как правило, в работах этого направления используется предположение об ацикличности образов. Ацикличность же влечет за собой стягиваемость (см.

* Более точно, многозначное отображение предполагается асферичным в размерностях $k=0, 1, \ldots, n-1$ и слабо асферичным в размерности $n$. В [17] используются несколько иные предположения. Точное определение асферичности отображения приведено в Комментариях.

Дополнение I), а стягиваемость с прикладной точки зрения представляется (более или менее) приемлемым условием. Однако часто (но не всегда) здесь возникает необходимость в принятии некоторых дополнительных требований (стягиваемость проекций образов на сферу или же более слабое: нормальность отображения; см. [9]).

Остановимся на точной формулировке теоремы Эйленберга — Монтгомери, обобщающей теорему Какутани.

Теорема 4.1. *Пусть $X$ — ацикличный абсолютный окрестностный ретракт, а $T: X \to 2^X$ — замкнутое многозначное отображение с ацикличными образами; тогда $T$ имеет в $X$ неподвижную точку.* ▲

Частным случаем теоремы 4.1 является следующее утверждение, оперирующее более привычными понятиями.

Теорема 4.2. *Пусть $X$ гомеоморфно замкнутому шару, а $T: X \to 2^X$ — замкнутое многозначное отображение со стягиваемыми образами; тогда $T$ имеет в $X$ неподвижную точку.* ▲

Как видим, предположение о стягиваемости образов здесь работает без всяких оговорок.

Интересно отметить технический прием, использованный в [87] для доказательства основной теоремы. С одной стороны, он полезен вообще при изучении неподвижных точек многозначных отображений (см., например, [9, 18]), с другой — указывает на важность определенного типа теорем о неподвижных точках однозначных отображений (точнее, теорем о совпадениях). В [87] установлен следующий результат.

Теорема 4.3. *Пусть $N$ — ацикличный абсолютный окрестностный ретракт, $M$ — компактное метрическое пространство, а $r: M \to N$ и $t: M \to N$ — непрерывные отображения, причем все прообразы $t^{-1}(y)$ (при любом $y \in N$) ацикличны*. Тогда $r$ и $t$ имеют точку совпадения, т. е. $r(x) = t(x)$ для некоторого $x \in M$.* ▲

Опять для простоты здесь можно иметь в виду более частную формулировку.

Теорема 4.4. *Пусть $N$ гомеоморфно замкнутому шару, $M$ — компакт, а $r: M \to N$ и $t: M \to N$ — непрерывные отображения, причем все прообразы $t^{-1}(y)$ стягиваемы; тогда $r$ и $t$ имеют точку совпадения, т. е. $r(x) = t(x)$ для некоторого $x \in M$.* ▲

Теорема 4.1 из теоремы 4.3 (или 4.2 из 4.4) выводится довольно просто [87]. Пусть $X$ — ацикличный абсолютный окрестностный ретракт (или множество, гомеоморфное замкнутому шару), а замкнутое многозначное отображение $T: X \to 2^X$ имеет ацикличные образы. Пусть $Z$ — график отображения $T$. Введем в рассмотрение два однозначных непрерывных отображения $r: Z \to X$ и $t: Z \to X$:

$$r(x, y) = y, \qquad t(x, y) = x.$$

* Так как прообразы непусты, то отображение $t$ сюръективно.

Очевидно, $t^{-1}(x) \equiv T(x)$. Поэтому все прообразы отображения $t$ ацикличны (стягиваемы). Все предположения теоремы 4.3 (4.4) выполнены. Следовательно, существует точка $(x^*, y^*) \in Z$, в которой

$$r(x^*, y^*) = t(x^*, y^*),$$

т. е. $y^* = x^*$. Но это и означает $x^* \in T(x^*)$, т. е. отображение $T$ имеет неподвижную точку *.

В этом же разделе стоит отметить работу [18], где изучаются неподвижные точки замкнутых многозначных отображений, вообще говоря, с произвольными компактными образами. В [18] установлена справедливость следующего интересного результата.

Теорема 4.5. *Замкнутое многозначное отображение $T$ с гомологически постоянными образами, отображающее шар $B$ в себя, имеет неподвижную точку.* ▲

Гомологическое постоянство образов в качественной интерпретации означает их «топологическую одинаковость». Например, все образы гомеоморфны сфере или представляют собой множества, состоящие из одинакового числа изолированных точек, и т. д.

## § 5. Некоторые приложения

Вернемся к задаче о седловой точке (пример 4 в § 2). Ясно, что если $X$, $Y$ — выпуклые компакты, а функция $\varphi(x, y)$ вогнута по $x$ и выпукла по $y$, то построенное в § 2 многозначное отображение $U(x) \times V(y)$ удовлетворяет теореме Какутани, откуда и следует (2.3).

Замена в схеме доказательства равенства (2.3) теоремы Какутани более общей теоремой Эйленберга — Монтгомери приводит к следующему утверждению.

Теорема 5.1. *Пусть $X$, $Y$ — ацикличные абсолютные окрестностные ретракты (например, множества, гомеоморфные замкнутому шару) и для любых $(x, y) \in X \times Y$ множества*

$$\operatorname{Arg}\min_{y \in Y} \varphi(x, y), \qquad \operatorname{Arg}\max_{x \in X} \varphi(x, y) \tag{5.1}$$

*ацикличны (например, стягиваемы); тогда функция $\varphi(x, y)$ имеет седловую точку* **.

Рассмотрим ту же задачу для неограниченных множеств $X$, $Y$. Пусть, например, $X = Y = R^n$ и множества (5.1) выпуклы (и, конечно, непусты). Используя в этом случае теорему 3.7, легко приходим к следующему результату.

---

* Опираясь на этот пример, легко себе представить роль, какую могут играть теоремы о точках совпадения для отображений $r: M \to N_1$ и $t: M \to N_2$, где $N_1 \neq N_2$, но, конечно, $N_1 \cap N_2 \neq \varnothing$. Для случая $N_1 = N_2$ интересные результаты получены в [88, 89]

** Эта теорема (в несколько менее общем виде) была указана Дебре [84].

Теорема 5.2. *Пусть существует такая ограниченная область* $\Omega$ $(0 \in \Omega)$ *с границей* $\Gamma$, *что для любых* $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \Gamma$ *справедливы неравенства* *

$$(\boldsymbol{x}, \operatorname{Arg}\min_{y \in R^n} \varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})) \leqslant \boldsymbol{x}^2, \quad (\boldsymbol{y}, \operatorname{Arg}\max_{x \in R^n} \varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})) \leqslant \boldsymbol{y}^2;$$

*тогда функция* $\varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ *имеет седловую точку.* ▲

При доказательстве нужно учесть следующее. Так как ограниченность множеств (5.1) не предполагается, то вместо $U(\boldsymbol{x})$, $V(\boldsymbol{y})$ надо рассматривать многозначные отображения $U(\boldsymbol{x}) \cap B$, $V(\boldsymbol{x}) \cap B$, где $B$ — замкнутый шар достаточно большого радиуса.

Предоставляем читателю сформулировать ряд других теорем о седловой точке (в случае неограниченных множеств $X$, $Y$) на основе теорем 3.8 и 3.9.

Рассмотрим задачу о существовании в игре равновесия по Нэшу (пример 2 в § 2). Использование теоремы Эйленберга — Монтгомери здесь приводит к следующему результату.

Теорема 5.3. *Пусть* $X_i$ — *ацикличные абсолютные окрестностные ретракты, функции выигрыша* $D_i(\boldsymbol{x})$ *непрерывны, а множества*

$$\operatorname{Arg}\max_{y_i \in X_i} D_i(x_1, \ldots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \ldots, x_N), \quad i = 1, \ldots, N$$

*ацикличны при любом* $\boldsymbol{x} \in X_1 \times \ldots \times X_N$; *тогда игра имеет равновесие по Нэшу* **. ▲

Очевидно, на основе теорем 3.7—3.9 можно сформулировать и доказать серию утверждений о существовании равновесия по Нэшу в случае неограниченных множеств $X_i$. Не останавливаясь на этом, укажем следующий результат, который может оказаться полезным для этой же цели (способ его использования для рассматриваемой задачи очевиден).

Теорема 5.4. *Пусть замкнутое многозначное отображение* $T: R_+^n \to 2^{R_+^n}$ ($R_+^n$ — *неотрицательный ортант*) *с выпуклыми образами удовлетворяет двум условиям:*

1) *существует* $r > 0$ *такое, что для любого* $\boldsymbol{x} \in R_+^n, \|\boldsymbol{x}\| = r$ *и любого* $\boldsymbol{y} \in T(\boldsymbol{x})$ *найдется индекс* $i$, *для которого* $y_i \geqslant x_i$;

2) *существует* $R > r$ *такое, что для любого* $\boldsymbol{x} \in R_+^n, \|\boldsymbol{x}\| = R$ *и любого* $\boldsymbol{y} \in T(\boldsymbol{x})$ *найдется индекс* $i$, *для которого* $y_i \leqslant x_i$.

*Тогда у отображения* $T$ *существует неподвижная точка* $\boldsymbol{x}^* \in R_+^n$. ▲

Эта теорема представляет собой многозначный аналог теоремы М. А. Красносельского о сжатии конуса (см. главу III). Доказательство может быть проведено по той же схеме, что и для однозначного отображения.

---

* Под скалярным произведением вектора $\boldsymbol{x}$ на множество $C$ понимается множество значений $(x, y)$, где $y \in C$. В этом случае $(x, C) \leqslant \alpha$ означает $(x, y) \leqslant \alpha$ для любого $\boldsymbol{y} \in C$.

** Более частная формулировка дана Дебре [84].

# КОММЕНТАРИИ

## К главе первой

§ 1. Если под моделью подразумевать лишь ее математическое содержание, то приоритетные вопросы решаются довольно просто. Непрерывные процедуры (1.5) (с несколько иным детальным описанием) предложил изучать А. В. Малишевский [46], дискретные процедуры (1.4) — автор [57—60]. Однако модель нельзя рассматривать в отрыве от предыстории ее возникновения, объема охватывающих задач, наконец, от полученных для нее результатов и возможностей их системных интерпретаций.

В рамках описанной схемы проводилось довольно много исследований в различных прикладных областях, например в математической экономике. Здесь естественно поставить вопрос: почему исследования рыночных моделей в своей основной части — по характеру экономические, а не общесистемные или чисто математические? Очевидно, по той причине, что условия существования рыночного равновесия и его устойчивости интерпретируются в экономических терминах, а сами исследования направлены на получение таких условий, которые с экономической точки зрения были бы естественными. Какие в таком случае исследования можно считать общесистемными? Очевидно те, в которых, например, условия существования и устойчивости равновесия имеют общесистемные интерпретации в нейтральных терминах, и эти интерпретации оказываются эффективными при переходе к различным конкретным областям приложений. Пионерской работой такого типа является работа А. В. Малишевского [46], заслуга которого как первооткрывателя состоит в том, что он выделил некоторый класс глобально устойчивых систем и дал естественные системные интерпретации характеристическим свойствам этого класса, а также показал, что большое число задач из различных областей укладывается в рамки этих интерпретаций. Тем самым А. В. Малишевский продемонстрировал, что задачи статики и динамики сложных систем могут изучаться на общесистемном уровне, а не только на узкоприкладном или абстрактном математическом.

С теми или иными оговорками в предлагаемую формальную схему укладываются многочисленные задачи из области экономики, биологии, управления и т. д. (см., например, [1—3, 12, 14, 20, 23, 24, 27, 29, 39, 44, 46, 48, 49, 57—60, 93, 100]).

§ 2. Об экспериментальном проведении игр типа описанной в примере 3 см. в [1, 2]. Изучению рыночной модели посвящена обширная литература (укажем лишь монографии [29, 53, 56]). По поводу моделей сосуществования биологических видов см. [20, 68].

§ 3. Рассматриваемые динамические модификации модели были предложены и изучались автором в работе [58] и ряде других. Упоминаемые формальные постановки задач статики могут иметь иное содержательное происхождение. В последующих главах это подтверждается примерами.

§ 4. Результаты и библиография по коллективному поведению автоматов имеются в [14] (см. также [78]). Формулировку и обсуждение «парадоксов» теории игр можно найти в [42, 52, 66]. О теории устойчивости движения см. [3, 26, 39, 70].

## К главе второй

Основы современной топологии были заложены А. Пуанкаре. Ее дальнейшее развитие связано с именами многих выдающихся ученых. Начало использованию топологических методов для исследования нелинейных уравнений в функциональных пространствах положил Ю. Шаудер. Многое для развития и внедрения топологических методов в нелинейный анализ сделано М. А. Красносельским.

§ 1—7. Материал этих параграфов представляет переработанный вариант той части статьи [61], которая непосредственно связана с понятием вращения векторного поля и теоремами о неподвижных точках. Принятый способ изложения наиболее близок к используемому в [32, 33, 36]. В своей основе излагаемые результаты являются классическими, но, к сожалению, обычно рассматриваются в топологической литературе, где терминология и критерии ценности не способствуют их популяризации в среде специалистов, профессионально не знакомых с топологией. Для знакомства с методами и результатами алгебраической топологии можно рекомендовать обстоятельную монографию [76], которая пригодна как для первоначального знакомства с предметом, так и для его углубленного изучения. С этой же целью могут быть использованы монографии [45, 67, 71]. Элементарные сведения по алгебраической топологии сообщаются в Дополнении I.

Весьма интересно и геометрически наглядно рассматриваемый круг вопросов трактуется в дифференциальной топологии. Здесь можно порекомендовать просто и доходчиво написанную книгу [50] (см. также [80]).

По поводу принципа Браудера см. [6, 33], где даны ссылки на первоисточники.

Что касается определения вращения векторного поля $\gamma(G, \Gamma)$, то мы здесь несколько грешим против истины. На самом деле более корректно писать $\gamma(G, \Gamma_\Omega)$, указывая область $\Omega$, которую мы имеем в виду. Дело в том, что несколько различных ограниченных областей могут иметь общую границу.

В случае, когда $\Gamma$ является сферой, теорема 2.1 допускает обращение (теорема Хопфа). Обращение теоремы 2.1 справедливо и в более общем случае, когда дополнение $\Gamma$, т. е. множество $R^n \setminus \Gamma$, двукомпонентно (состоит из двух компонент связности) [36].

Доказательство теоремы 5.1 можно найти, например, в [36]. Там же указаны ее связи с рядом интересных родственных результатов.

§ 8. Теория гомотопий, или гомотопическая топология, представляет собой обширную теорию, в поле зрения которой находится множество увлекательных и часто сложных вопросов. Для серьезного изучения гомотопической топологии можно рекомендовать монографию [77] (при условии предварительного знакомства с основами алгебраической топологии). Примерно в изложенном плане вопросы существования неподвижных точек рассматривались еще Л. Кронекером в конце прошлого века.

§ 9. Одной из наиболее замечательных топологических теорем о неподвижной точке является теорема Лефшеца. Чтобы сформулировать ее, напомним определение следа гомоморфизма.

Пусть $G$ — свободная абелева группа с конечным базисом (с конечным числом образующих) $g_1, \ldots, g_n$, т. е. любой элемент $g \in G$ представим единственным образом в виде линейной комбинации

$$g = \alpha_1 g_1 + \ldots + \alpha_n g_n;$$

произвольный гомоморфизм $\varphi : G \to G$ задается в виде

$$\varphi(g_i) = \alpha_{i1} g_1 + \ldots + \alpha_{in} g_n.$$

Можно показать, что след гомоморфизма

$$\mathrm{trace}\,(\varphi) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ii}$$

не зависит от выбора базиса.

Пусть теперь $X$ — компактный АОР, причем $X \subset R^n$ (хотя для окончательного вывода это не существенно). Всякое непрерывное отображение $f : X \to X$ порождает гомоморфизмы $f_{*i}$ в группах гомологий $H_i(X)$. Число Лефшеца $\Lambda(f)$ отображения $f$ определяется следующим образом

$$\Lambda(f) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \mathrm{trace}\,(f_{*i}).$$

Теорема Лефшеца утверждает (см. например, [76]): если $\Lambda(f) \neq 0$, то отображение $f : X \to X$ имеет в $X$ неподвижную точку.

В частности, если $X$ стягиваемо, то все группы гомологий $H_i(X)$ [за исключением группы $H_0(X)$] тривиальны, и, значит, все гомоморфизмы $f_{*i}$ $(i \neq 0)$ (любого непрерывного отображения $f : X \to X$) нулевые. Поэтому $\Lambda(f) = 1$, т. е. любой стягиваемый АОР обладает свойством неподвижной точки.

В основном тексте уже отмечалось, что абсолютными окрестностными ретрактами не являются лишь довольно «дикие» компакты. В практической деятельности удобно руководствоваться следующим точным результатом [11]: конечномерный компакт принадлежит классу АОР тогда и только тогда, когда он локально стягиваем.

§ 10. Принцип сжимающих отображений доказывается во многих учебниках (см., например, [31, 43]), о нормах векторов и матриц см. [16, 30]. Теорема 10.2 принадлежит М. А. Красносельскому и впервые была опубликована в [41]. Теорема 10.3 установлена М. Эдельштейном [85].

В [46, 58] условия типа (10.14)—(10.17) интерпретировались как ограничения на величину межэлементных связей в системе.

## К главе третьей

Начало развитию теории полуупорядоченных пространств положил Л. В. Канторович [28]. Серьезный вклад в теорию внес Г. Биркгоф [5]. История вопроса кратко изложена в предисловии к монографии [15]. Наиболее продуктивная аксиоматика с точки зрения нелинейного анализа была разработана и изучена М. Г. Крейном (см. [40]). На этой основе впоследствии М. А. Красносельским и его учениками была развита теория нелинейных операторов в банаховых пространствах с конусом (см. [32—34, 36]).

§ 1. Положительным операторам посвящена монография [34]. Теоремы об операторах, сжимающих и растягивающих конус, принадлежат М. А. Красносельскому (доказательства общих утверждений приведены в [34, 36]).

§ 2. С более общих позиций принцип Биркгофа — Тарского описан, например, в [15]. В настоящее время получены различные обобщения этого принципа (некоторые из них описаны в [34, 36]).

Из приведенного доказательства легко видеть, что конусный отрезок в формулировке теоремы 2.1 может быть заменен таким множеством $\mathfrak{N}$, что для любого $\mathfrak{M}\subset\mathfrak{N}: \sup\mathfrak{M}\subset\mathfrak{N}$, но дополнительно надо потребовать, чтобы существовала точка $x\in\mathfrak{N}$, идущая вперед. Или же, наоборот, $\mathfrak{N}$ таково, что $\inf\mathfrak{M}\in\mathfrak{N}$ для любого $\mathfrak{M}\subset\mathfrak{N}$, и существует точка $x\in\mathfrak{N}$, идущая назад.

Нетрудно видеть также, что в предположениях теоремы 2.1 на $\langle v^0, w^0\rangle$ существуют «наименьшая» и «наибольшая» неподвижные точки $\overset{*}{x}_1$, $\overset{*}{x}_2$ оператора $F$ (в том смысле, что для любой другой неподвижной точки $x^*$ выполняются неравенства $\overset{*}{x}_1\leqslant\overset{*}{x}\leqslant\overset{*}{x}_2$).

§ 3. Понятие гетерогенного оператора в $R^n$ введено в [59]. Затем в [62] оно было обобщено на бесконечномерный случай с помощью операции расщепления банахова пространства. Гетеротонные операторы определены и изучены в [63]. Специальный класс композиционно гетерогенных отображений рассмотрен в [60].

Заметим, что обобщенная монотонность функций-индикаторов является достаточным, но не необходимым условием гетерогенности системы.

§ 4. Понятие «псевдовогнутости на диагонали» ранее не рассматривалось. Вопросы существования и единственности неподвижных точек в более жестких предположениях псевдовогнутости операторов изучались в [59, 62, 63]. При этом гетерогенные псевдовогнутые операторы назывались комбинированно вогнутыми. Теория монотонных вогнутых операторов излагается, например, в [34] (см. также [57]).

§ 5. Излагаемые результаты представляют собой адаптированные фрагменты из [59, 62, 63].

§ 6. По поводу рыночных моделей см. [29, 53, 56, 92, 100]. Смешанная модель рынка ранее практически не изучалась. Вопросы единственности рыночного равновесия для рынков с валовой заменимостью товаров в неявной форме можно обнаружить при изучении задач сравнительной статики [53].

## К главе четвертой

§ 1. Моделям межотраслевого баланса посвящена обширная литература. Общие сведения можно почерпнуть из монографий [53, 56].

В близком контексте модель лечения больного (пример 4) обсуждалась в [47].

§ 2. Приводимые результаты обычно рассматриваются в локальной интерпретации (для малых изменений спроса). В случае конечных приращений спроса законы сравнительной статики для рынка с валовой заменимостью товаров излагаются в [53]. Наши исходные предположения иногда в деталях отличаются от традиционных.

§ 3. Результаты ранее не публиковались.

§ 4. Понятие натуральной системы (в более общем виде, чем здесь) было введено в [47], где, собственно, и была установлена справедливость аналога теоремы 4.1. Впоследствии натуральные системы ($P$-системы) изучались в [61].

Для доказательства аналога теоремы 4.1 в [47] предложена изящная идея, основанная на использовании леммы Шпернера о покрытии симплекса. Мы предпочли технически более сложное доказательство из [61], чтобы лишний раз продемонстрировать технику применения методов, изложенных в главе II. Кроме того, данное доказательство дает возможность легко сделать вывод о справедливости более общей теоремы 4.2.

Интересную идею доказательства теоремы 4.1 сообщил автору в частной беседе М. А. Красносельский. Суть ее состоит в следующем. Рассмотрим для простоты случай $R^3$. Пусть прямая $l$ проходит через 0 и через некоторую внутреннюю точку неотрицательного ортанта $R^3_+$. Пусть замкнутая кривая $\Gamma$ является границей множества $\Omega=\{x \mid x\in R^3_+, \|x\|=1\}$. Понятно, что если замкнутая кривая, служащая образом $\Gamma$, будет зацеплена с $l$, то образ некоторого $x\in\Omega$ будет лежать на $l$, причем в $R^3_+$, так как $F$ не может переводить точки $x\neq 0$ из $R^3_+$ в отрицательный ортант. Образ $\Gamma$ будет зацеплен с $l$, если он может быть непрерывно деформирован в $\Gamma$ и при такой деформации не пересекает $l$. Соответствующую деформацию здесь легко указать. (По поводу коэффициентов зацепления см. [76].)

Теорема 4.4, по существу, была доказана в [61], там же приведена иллюстрация (здесь теорема 4.5) на модели нелинейного межотраслевого баланса. Модель нелинейного межотраслевого баланса с точки зрения натуральности обсуждалась в [47], где отмечалась справедливость следующего (очевидного в данном контексте) результата:

если в системе невозможен абсолютно непродуктивный режим, то существует продуктивный режим (которому соответствуют строго положительные чистые выпуски всех продуктов).

Таким образом, предположение теоремы 4.5

$$\lim_{\|x\|\to\infty} \|x-P(x)\|=\infty$$

не является необходимым для существования продуктивного режима. Оно существенно лишь для возможности реализации в системе любого наперед заданного набора неотрицательных чистых выпусков.

§ 5. Результаты ранее не публиковались. Близкие результаты (для случая гладких отображений) в неявной форме можно найти в монографии [56].

§ 6. С некоторыми изменениями здесь излагается содержание статьи [86] (см. также 102]).

Весьма интересные с рассматриваемой точки зрения результаты приведены в работе Л. И. Розоноэра («Автоматика и телемеханика», 1973, № 5, 6).

## К главе пятой

§ 1. Теорема 1.1 была, по существу (без полного доказательства), указана Пале [101]. Ее доказательство в [104] ошибочно. Приведенное доказательство взято из [61]. Остальные результаты параграфа также были опубликованы в [61].

§ 2. Теорема 2.1 доказна в [37] (см. также [61]). Доказательство основано на исправленной схеме из [104].

§ 3. Несколько более общая формулировка теоремы 3.1 дана в [75]. По этому поводу см. [55, 56, 73].

Понятие $P$-матрицы введено Гейлом и Никайдо [90]. $P$-матрицы подробно описаны в [56], там же обсуждается их связь с вопросами глобальной обратимости отображений.

Легко видеть что из теоремы 3.3 вытекает глобальная обратимость отображения $F: X \longrightarrow R^n$, матрица Якоби которого всюду в $X$ является $P$-матрицей, при условии, что $X$ — прямоугольная область (т. е. не обязательно $X=R^n$).

Операторы, действующие в гильбертовом пространстве и удовлетворяющие условию (3.1), называются монотонными (хотя они не имеют ничего общего с монотонными операторами, действующими в пространствах с конусом) (см. главу III). Теория таких операторов излагается, например, в [13].

§ 4. Вопрос глобальной разрешимости неявных функций рассматривается в [61], там же доказана теорема 4.1. По поводу локальной разрешимости неявных функций см., например, [43].

## К главе шестой

§ 1. Ансамбли динамических систем с дискретным временем изучались в [64].

§ 2. Ошибка, о которой говорится в комментариях к теореме 2.2, содержится, например, в работе [96].

§ 3. Теорема 3.2 опубликована в [64]. Она представляет собой обобщение результатов Ф. Майерса по обращению принципа сжимающих отображений [96, 98] (см. также [93, 97]). Впервые обращение принципа сжимающих отображений для частного случая операторов, действующих в компактах, было дано Л. Яношем [93]. Здесь следует также отметить интересный результат, полученный в [82]:

*пусть оператор $F$ отображает в себя некоторое абстрактное множество $X$, имеет неподвижную точку $\xi \in X$ и никакая итерация $F^n$ $(n=1, 2, \ldots)$ не имеет двух различных неподвижных точек; тогда $X$ можно так метризовать, что $F$ будет сжимающим оператором с любым наперед заданным коэффициентом сжатия $\lambda \in (0, 1)$.*

§ 5 и 6. Результаты анонсировались в [64]. Теорема 6.5 близка по духу к результатам Н. Н. Красовского [39] по обращению теорем Ляпунова (см. также [26]). Здесь, однако, не рассматриваются дифференциальные свойства функции Ляпунова (зато дополнительно указывается, что функцией Ляпунова может служить расстояние от изображающей точки до положения равновесия в некоторой подходящей метрике).

§ 7. Доказательство взято из [64]. Его грубая схема была предложена еще Л. Яношем [93] и использовалась затем Ф. Майерсом [96, 98].

§ 8. Приводимые результаты обсуждались в [64].

§ 9. Более подробно вопросы единственности решения дифференциальных уравнений рассматриваются в монографии [33]. Там же указаны первоисточники.

§ 10. Первая теорема об общих условиях нелокальной продолжимости была установлена А. Винтнером. Более общая теорема (здесь теорема 10.2) получена М. А. Красносельским и С. Г. Крейном. Подробности см. в [33].

§ 11. Теорию уравнений в контингенциях развили С. Заремба [105] и А. Маршо [95]. Их результаты воспроизведены и дополнены в статье [4] (см. также [74]).

## К главе седьмой

§ 1. Гомогенные системы общего вида изучались в [57]. Более частные (но очень интересные по своей качественной интерпретации) результаты были получены в [46], где выделен класс систем, удовлетворяющих условию «групповой контрамонотонности». Этот класс представляет собой подкласс положительно гомогенных систем. Устойчивость положительно гомогенных систем специального вида в других терминах изучалась в исследованиях рыночных моделей с валовой заменимостью товаров (см., например, [29, 53, 56]). Лемма 1.1 заимствована из [33].

§ 2. Вопросы динамики коллективного поведения в гетеротонных системах бегло рассматривались в [63]. Более подробно изучались частные случаи гетерогенных [59] и композиционно гетерогенных систем [60].

§ 3. Близкие вопросы рассматривались в [59, 60, 63].

Определенный интерес представляло бы исследование связей между сходимостью дискретной процедуры (1.1) и непрерывной (1.8). Такая работа на серьезном уровне не проводилась. Вместе с тем естественно ожидать, что в не слишком жестких предположениях из сходимости дискретной процедуры следует сходимость непрерывной. Грубая схема рассуждений может быть такова. Пусть все траектории (1.1) сходятся и имеется непрерывная несходящаяся траектория (1.8) $x(t)$. Рассмотрим на этой траектории последовательность точек $x(t_k)=x^k$, где $t_k\to\infty$. Интуитивно естественным представляется, что последовательность $t_k$ можно выбрать так, что траектория $x^k=x(t_k)$ будет удовлетворять (1.1) и будет расходиться, а это вступает в противоречие с исходным предположением. Вопрос состоит в том, при каких предпосылках это рассуждение можно провести корректно.

§ 4. В таком ракурсе свойства оператора сдвига изучались в [63].

§ 5. Гетерогенные системы самостоятельно изучались в [59].

Примером гетерогенной системы может служить смешанный рынок, на котором товары находятся в одном из двух возможных отношений: валовой заменимости или валовой дополнительности. Рынок, структура которого удовлетворяет так называемому «правилу знаков», рассматривался в [100]. Подобной структуре здесь соответствуют системы, выделяемые совокупностью предположений теоремы 5.1.

Легко видеть, что в теоремах 5.1 и 5.2 речь идет не о чем ином, как о положительно и отрицательно гомогенных системах при условии, что полуупорядоченность задается подходящим ортантом. Однако возможность выбора подходящего ортанта на практике не всегда очевидна, и в этом случае проверка простых структурных аксиом может оказаться полезным инструментом.

Нужно также отметить, что системы, выделяемые условиями теорем 5.1 и 5.2, не укладываются полностью в рамки рассмотрения гомогенных систем, так как в общем случае оператор межэлементных связей $F$ оставляет инвариантным не тот ортант, с помощью которого вводится полуупорядоченность. По этой причине оператор $F$ не может быть, например, вогнутым.

§ 6. Еще в [57] автор высказывал гипотезу, что в положительно гомогенных системах траектории сходятся к одному из положений равновесия (в зависимости от реализации), приводя в пример двухэлементную строго положительно гомогенную систему. Вопрос до сих пор остается открытым. Он имеет положительное решение в случае стохастического поведения элементов, что отмечалось в заметке автора «Об устойчивости децентрализованных систем» (см. сборник [2]).

## К главе восьмой

§ 1. Системы с ограниченным межэлементным взаимодействием (в данном здесь определении) в общей форме изучались в [46] и [58]. В [46] рассматривались системы с непрерывным временем, в [58] — с дискретным. В несколько менее общей форме подобный класс систем изучался и ранее (см., например, [29]).

§ 2. Результаты излагались в [58]. Там, где речь идет о дифференциальных ограничениях, предполагается непрерывная дифференцируемость оператора $F$. Требование непрерывной дифференцируемости существенно в тех местах, где используется теорема о среднем, опирающаяся в свою очередь на теорему Лагранжа, в которой утверждается существование $y \in [a, b]$ такого, что для непрерывно дифференцируемой функции $\varphi(x)$ справедливо

$$\varphi'(y) = \frac{\varphi(b) - \varphi(a)}{b - a}.$$

Для кусочно-гладкой непрерывной функции $\varphi(x)$ это в общем случае не так, но можно показать, что

$$\exists\, y_1, y_2 \in [a, b], \lambda \in [0, 1] : \lambda\varphi'(y_1) + (1 - \lambda)\varphi'(y_2) = \frac{\varphi(b) - \varphi(a)}{b - a}.$$

Если теперь вместо теоремы Лагранжа пользоваться этим, более общим результатом, то везде, где ранее появлялась матрица $F'(z)$, теперь будет

$$\lambda F'(z_1) + (1 - \lambda) F'(z_2), \tag{K. 1}$$

где матрица (К.1) принадлежит выпуклой оболочке

$$\mathrm{Co}\{F'(z)\} = \{R|\forall z_1, z_2\, \alpha\in[0,1]: R = \alpha F'(z_1) + (1-\alpha) F'(z_2)\}$$

множества матриц $\{F'(z)\}$. С другой стороны, ясно, что если любая матрица $F'(z)$ из множества $\{F'(z)\}$ удовлетворяет какому-либо из условий (1.4) и (1.5), то этому же условию будет удовлетворять любая матрица (К.1) из выпуклой оболочки $\mathrm{Co}\{F'(z)\}$. Это замечание позволяет освободиться от требования непрерывной дифференцируемости оператора $F$, ограничиваясь требованием непрерывности и кусочной гладкости $F$.

§ 3. Аналоги дифференциальных ограничений в форме конечных приращений были предложены в [46]. Там же была проанализирована связь между ними.

§ 4. Излагаемые вопросы рассматривались в [46], но в несколько ином «исполнении».

§ 5. В основном примеры заимствованы из [46], но частично «переделаны».

§ 6. Системы такого типа рассматривались в [46].

§ 7. Важность изучения линейных систем определяется их существенной ролью в вопросах локальной устойчивости. Правда, концентрируя внимание на глобальном анализе систем, мы оставили вопросы локальной устойчивости в стороне, хотя понятно, что (как и в классической теории устойчивости) здесь имеется широкое поле деятельности.

Гипотеза о том, что условие (7.1) не только достаточно, но и необходимо для сходимости дискретной процедуры, высказано автором в [59]. Несмотря на несколько предпринятых попыток, вопрос остается нерешенным. Еще более интересным (и, по-видимому, существенно более сложным) представляется вопрос об определении необходимого и достаточного условия сходимости непрерывной процедуры (в линейной системе).

## К главе девятой

§ 1 и 2. Процедуры с демпфированием кратко обсуждались в [58]. Здесь много нерешенных вопросов. Основной интерес, по-видимому, представляет выявление более глубоких связей со сходимостью непрерывных процедур. Излагаемые методы в какой-то степени перекликаются с итеративными методами, рассматриваемыми в [27], хотя и имеют существенные отличия.

§ 3. Вопросы сходимости вероятностных процессов подробно излагаются в монографии [21]. Более доступно изложение этих вопросов в [22]. Для тех, кто профессионально не знаком с теорией вероятностей, можно рекомендовать ознакомиться с главой IV монографии М. А. Айзермана, Э. М. Бравермана, Л. И. Розоноэра «Метод потенциальных функций в теории обучения машин» (М., «Наука», 1970).

§ 4. Стохастический вариант модели рассматривался в [58] и некоторых других заметках автора.

§ 5. Проблематика коллективного поведения в системах с векторными элементами обсуждалась в работе Т. А. Хуродзе и автора «Задачи коллективного поведения» (Труды 3-й Всесоюз. школы-семинара по управлению большими системами. Тбилиси, 1974 г. «Мецниереба», 1976).

## К главе десятой

§ 1. Игровой анализ различных моделей распределения ресурса проводился в работе В. Н. Буркова и автора «Распределение ресурсов в активной системе», опубликованной в сборнике [1]. На примере этой же модели читался цикл лекций [24].

В общих рассуждениях, приведенных в параграфе, игнорируются некоторые детали, в частности, условия равновесия системы в случае наличия ограничений на величины $x_i^k$. Более детальный анализ имеется, например, в упоминавшейся выше статье В. Н. Буркова и автора.

В качестве самостоятельного упражнения можно рекомендовать параллельный анализ следующей задачи о назначении планов. Пусть $x_i$ обозначает объем выпуска продукции элементом $A_i$. Каждый $A_i$ характеризуется функцией затрат $\psi_i(x_i)$, определяющей необходимые затраты на производство продукции в количестве $x_i$ (для простоты можно положить $\psi_i(x_i)=x_i^2/2\alpha_i$). Продукцию элементы «сдают» в ЦО по цене $\lambda$. Их функции выигрыша определяются прибылью $D_i=\lambda x_i-\psi_i(x_i)$. Задача ЦО состоит в реализации суммарного объема выпуска $\sum\limits_i x_i=X$ при минимальных затратах, т. е.

$$\sum_i \psi_i(x_i) \to \min_{x_1,\dots,x_n}.$$

Такой параллельный анализ полезно продолжить и в следующих параграфах.

§ 2. Принцип открытого управления был предложен В. Н. Бурковым. На основе работ Буркова и его сотрудников сейчас возникло целое направление по исследованию активных систем. Формальное определение активной системы пока не устоялось, но на содержательном уровне здесь все достаточно ясно. Речь идет о системах, в которых существен «человеческий фактор», т. е. элементы системы имеют индивидуальные интересы, определенную свободу действий и способны «сознательно» принимать решения.

Ясно, что поле деятельности в данной области достаточно широкое. С некоторыми работами по этому поводу можно ознакомиться по сборникам [1, 2] (см. также обзор [23]).

§ 3. Такая схема организации распределения ресурса рассматривалась в упоминавшейся уже работе В. Н. Буркова и автора в сборнике [1].

§ 4. Впервые подобная точка зрения была изложена в [24], затем более обстоятельно в [12].

§ 5. Композиционно гетерогенным системам посвящена отдельная статья автора [60]. Именно эта работа послужила толчком к обнаружению более общего понятия гетеротонного оператора. Такое понятие введено и изучено в [63], после чего, естественно, необходимость в самостоятельном изучении композиционно гетерогенных систем отпала.

§ 6. Задача метаигрового синтеза поставлена в [12, 24]. Нужно отметить, что сам термин «метаигра» введен Н. Ховардом, но его точка зрения (в смысле изучаемых вопросов) с рассматриваемой здесь задачей практически не пересекается. Кстати, некоторые выводы Ховарда оказались ошибочными. Они уточнены в работе Н. С. Кукушкина «Точки равновесия в метаиграх»

(ЖВМиМФ, 1974, т. 14, № 2; в этой же статье можно найти ссылки на работы Ховарда).

## К Дополнению первому

О литературе по алгебраической топологии уже говорилось в комментариях к главе II. Дополнительно укажем здесь на известную монографию П. С. Александрова «Комбинаторная топология» (М., Гостехиздат, 1947). Недавно вышла новая монография П. С. Александрова «Введение в гомологическую теорию размерности» (М., «Наука», 1975), в первых трех главах которой сравнительно доходчиво излагается теория гомологий.

§ 1. Серьезное знакомство с теорией групп, по крайней мере для первоначального изучения теории гомологий, едва ли нужно. Здесь можно ограничиться весьма элементарными сведениями об абелевых группах. Но понятие группы как и всякое другое абстрактное понятие, должно базироваться на знакомстве с характерными примерами. С этой целью полезно ознакомиться с популярной книгой И. Гроссмана и В. Магнуса «Группы и их графы» (М., «Мир», 1971).

§ 4 и 5. Мы рассматривали цепи с целочисленными коэффициентами. Этот факт часто подчеркивается в обозначении групп гомологий $H_r(K, Z)$. Иногда рассматривают цепи с коэффициентами из произвольной (фиксированной) абелевой группы $\mathcal{U}$, обозначая получающиеся группы гомологий через $H_r(K, \mathcal{U})$.

Ранг группы $H_r$ называется еще $r$-мерным числом Бетти.

Легко видеть, что теория гомологий может быть построена независимо от каких бы то ни было интуитивно геометрических представлений. Для ее построения существенно лишь наличие оператора $\Delta$, обладающего свойством $\Delta\Delta x=0$. Оператор $\Delta$ называют нижним граничным оператором. Фундаментальную роль в алгебраической топологии играет также верхний граничный оператор $\nabla$, открытый в 1934 г. независимо А. Н. Колмогоровым и Дж. Александером. Кограница $\nabla s^r$ симплекса $s^r$ определяется как $(r+1)$-мерная цепь, принимающая на каждом симплексе $S^{r+1}$ значение, равное коэффициенту инцидентности $(s^{r+1} : s^r)$. На цепи оператор $\nabla$ распространяется линейно. Коциклы определяются условием $\nabla x=0$. Как и $\Delta$, оператор $\nabla$ удовлетворяет условию $\nabla\nabla x=0$. Это позволяет ввести факторгруппу группы $r$-мерных коциклов по подгруппе $r$-мерных кограниц, называемую $r$-й группой когомологий и обозначаемую $H^r$.

При изучении любой науки полезно знакомство с трудами ее создателей. Начало развитию алгебраической топологии положил А. Пуанкаре в своей фундаментальной работе «Analysis situs». С этой работой и дополнениями к ней можно ознакомиться по изданию: Пуанкаре А. Избранные труды, т. II. М., «Наука», 1972.

§ 6. Геометрически наглядно многие понятия алгебраической топологии трактуются в популярной статье В. Г. Болтянского и В. А. Ефремовича «Очерк основных идей топологии», которая (в нескольких частях) публиковалась в сборнике «Математическое просвещение», выходившем в конце 50-х начале 60-х годов (см., например, 1959, вып. 4 и 1961, вып. 6).

§ 10. Обозначим $\varepsilon_i$ — число тех симплексов $s^n_{\alpha i}\in K_\alpha$, которые при симплициальном отображении (являющемся симплициальным приближением $f$) переходят в некоторый симплекс $s^n_{\beta j} \in K_\beta$ с сохранением ориентации, $\delta_i$ — число тех симплексов $s^n_{\alpha i} \in K_\alpha$, которые переходят в $s^n_{\beta j}$ с изменением ориентации. Легко видеть, что $\gamma = \varepsilon_i - \delta_i$. Именно так было дано первоначально определение степени отображения Брауэром.

## К Дополнению второму

Данное дополнение представляет собой несколько видоизмененный вариант статьи [65].

Излагаемые топологические методы берут начало от работ С. Какутани [94], С. Эйленберга, Д. Монтгомери [87], Э. Г. Бегла [81]. Эти методы получили в последнее время существенное развитие в работах группы математиков, возглавляемой Ю. Г. Борисовичем (см., например, [7—10, 17—19].

§ 1. Более подробно свойства многозначных отображений описаны, например, в [44] (см. также [56]).

Метрика Хаусдорфа вводится следующим образом. Пусть $B$ — единичный шар в $R^n$ (с центром в нуле) и $Y \subset R^n$. Тогда для $U, V \in Y_c$

$\rho(U, V) = \inf\{t \geqslant 0 : U \subset V + tB,\ V \subset U + tB\}$.

Подробнее о метрике Хаусдорфа см.: Г. Хадвигер. Лекции об объеме, площади поверхности и изопериметрии, М., «Наука», 1966.

Отметим здесь интересный результат (теорема Бляшке): *если $Y$ — компакт, то пространство $Y_c$, снабженное метрикой Хаусдорфа, также компактно.*

§ 2. По поводу задачи о седловой точке и ее связи с задачей нелинейного программирования см. [25].

§ 3. Теоремы 3.1 и 3.2 были приведены в [7]. Там же приведена теорема 3.5. В [8] дано развернутое изложение содержания заметки [7].

Теоремы 3.6—3.9 указывались в [65].

Подробнее о теореме об алгебраическом числе неподвижных элементов многозначного поля см. в [8].

Теорема 3.11 представляет собой один из наиболее простых результатов Майкла [99] о непрерывных селекторах. Во второй части этой работы доказываются теоремы о непрерывных селекторах без предположения о выпуклости образов (выпуклость заменяется стягиваемостью).

Замечание о возможности развития теории вращения многозначных векторных полей, полунепрерывных снизу, необходимо уточнить. Здесь могут возникнуть неприятности из-за того, что изучаемое отображение в общем случае незамкнуто. Поэтому чисто механический перенос определения вращения поля на поля, полунепрерывные снизу, здесь невозможен. С другой стороны, ясно, что аналоги теорем 3.6—3.9 остаются справедливыми для отображений, полунепрерывных снизу, так как их предположения гарантируют, что все селекторы имеют одно и то же вращение, отличное от нуля.

§ 4. Отображение $T : X \to 2^x$ называется асферичным в размерности $k$, если в любую $\varepsilon$-окрестность любого образа $T(x)$ можно вписать такую окрестность $V(x, \varepsilon, k)$ [содержащую $\delta(\varepsilon)$-окрестность $F(x)$, где $\delta(\varepsilon)$ не зависит от $x$], что $\pi_k V = 0$, где $\pi_k V$ — $k$-мерная гомотопическая группа множества $V$

($\pi_0 V=0$ означает линейную связность $V$, $\pi_1 V=0$ — стягиваемость в $V$ любого замкнутого контура и т. д.).

Отображение $T$ называется слабо асферичным в размерности $k$, если предыдущее свойство справедливо при некотором $\varepsilon$.

По-видимому, первой работой, в которой изучается аппроксимация многозначных отображений с асферичными образами, является [54].

Сущность гомологического подхода заключается в переходе от исходной задачи о неподвижной точке многозначного отображения к задаче о совпадении соответствующих однозначных отображений $r$ и $t$. Этот прием был открыт Эйленбергом и Монтгомери [87] и затем неоднократно использовался другими авторами [9, 18]. Доказательство теоремы 4.3 опирается на известную теорему Виеториса:

*пусть $N$ и $M$ — компакты и отображение $f: N \to M$ обладает тем свойством, что все прообразы $f^{-1}(x)$ ацикличны; тогда индуцируемые гомоморфизмы групп гомологий*

$f_{*i}: H_i(N) \to H_i(M)$ — *изоморфизмы.*

Ссылку на оригинальную работу Виеториса можно найти в [87] [по этому поводу см. также: Скляренко Е. Г. УМН, 1964, т. XIX, вып. 6 (120)].

Развиваемый в работе [18] метод, по утверждению автора, обобщает как гомологический, так и аппроксимативный подход в теории неподвижных точек многозначных отображений. Нужно отметить, что такое обобщение распространяется лишь на определенную часть результатов. Вводимая в [18] топологическая характеристика многозначного отображения в определенном смысле аналогична степени отображения по модулю два, поэтому здесь невозможно установить результат, аналогичный теореме об алгебраическом числе элементов поля, которая устанавливается в рамках аппроксимативного подхода.

# СПИСОК ОСНОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

$\forall$ — квантор общности ($\forall x$ следует читать: «для всех $x$»)

$\exists$ — квантор существования ($\exists x$ означает: «существует $x$»)

$\bigcup$ — знак объединения множеств

$\bigcap$ — знак пересечения множеств

$\setminus$ — знак теоретико-множественной разности

$\in$ — знак принадлежности

$\subset$ — знак включения

$\varnothing$ — пустое множество

$\mathrm{cl}\,\Omega = \overline{\Omega}$ — замыкание множества $\Omega$

$\mathrm{int}\,\Omega$ — внутренность множества $\Omega$

$\{x_0\}$ — множество, состоящее из единственной точки $x_0$

$R^n$ — $n$-мерное нормированное пространство

$R^n_+$ — неотрицательный ортант, т. е. множество векторов $x = \{x_1, \ldots, x^n\}$ с неотрицательными координатами

$F: X \to Y$ — отображение $F$ множества $X$ в множество $Y$

$[a_{ij}]$ — матрица

$\|\cdot\|$ — норма

$\|x\|_m = \max\limits_i |x_i|$, $\|x\|_l = \sum\limits_i |x_i|$

$\min\{\alpha, \beta\}$ — наименьшее из чисел $\alpha$, $\beta$

$\min\{\varphi(x): x \in X\} = \min\limits_{x \in X} \varphi(x)$

$S = \{y \mid y = P(x), x \in X\}$ — множество элементов $y$ таких, что $y = P(x)$ и $x \in X$

$\mathrm{diag}\,(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ — диагональная матрица с элементами на диагонали $a_{ii} = \alpha_i$

$\mathrm{Sign}\,x = \{\mathrm{sign}\,x_1, \ldots, \mathrm{sign}\,x_n\}$

$x \geqslant y$ — означает $x - y \in K$, где $K$ — конус, с помощью которого введена полуупорядоченность; как правило, $K = R^n_+$, т. е. $x \geqslant y$ означает, что $x_i \geqslant y_i$ для всех $i = 1, \ldots, n$

$x^n \to x$ — последовательность $x^n$ сходится по норме к $x$

$\Pr\{A\}$ — вероятность события $\{A\}$

# ЛИТЕРАТУРА


1. Активные системы. Сб. статей. М., Изд. Ин-та проблем управления, 1973.
2. Активные системы. Сб. статей. II. М., Изд. Ин-та проблем управления, 1974.
3. *Барбашин Е. А.* Введение в теорию устойчивости. «Наука», 1967.
4. *Барбашин Е. А., Алимов Ю. И.* К теории релейных дифференциальных уравнений.— Изв. высш. уч. заведений. Математика, 1962, № 1 (26).
5. *Биркгоф Г.* Теория структур. ИЛ, 1952.
6. *Борисович Ю. Г.* К теореме Браудера о неподвижной точке.— Труды семинара по функц. анализу, ВГУ, 1963, № 7.
7. *Борисович Ю. Г., Гельман Б. Д., Мухамадиев Э., Обуховский В. В.* О вращении многозначных векторных полей.— Докл. АН СССР, 1969, т. 187, № 5.
8. *Борисович Ю. Г., Гельман Б. Д., Мухамадиев Э., Обуховский В. В.* О вращении многозначных векторных полей.— Труды семинара по функц. анализу, ВГУ, 1969, вып. 12.
9. *Борисович Ю. Г., Гельман Б. Д., Обуховский В. В.* О некоторых топологических инвариантах многозначных отображений с невыпуклыми образами.— Там же.
10. *Борисович Ю. Г., Гликлих Ю. Е.* О числе Лефшеца для одного класса многозначных отображений.— Труды Седьмой летней матем. школы. Киев, 1970.
11. *Борсук К.* Теория ретрактов. «Мир», 1971.
12. *Бурков В. Н., Опойцев В. И.* Метаигровой подход к управлению иерархическими системами.— «Автоматика и телемеханика», 1974, № 1.
13. *Вайнберг М. М.* Вариационный метод и метод монотонных операторов. «Наука», 1972.
14. *Варшавский В. И.* Коллективное поведение автоматов. «Наука», 1973.
15. *Вулих Б. З.* Введение в теорию полуупорядоченных пространств. Физматгиз, 1961.
16. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. «Наука», 1966.
17. *Гельман Б. Д.* Обобщение теоремы Какутани о неподвижной точке для многозначных отображений.— Докл. АН СССР, 1973, т. 209, № 1.
18. *Гельман Б. Д.* Топологическая характеристика многозначных отображений и теоремы типа Какутани.— Труды матем. ф-та ВГУ, 1974, вып. 12.
19. *Гликлих Ю. Е.* Неподвижные точки многозначных отображений с невыпуклыми образами и вращение многозначных векторных полей.— Сб. трудов аспирантов матем. ф-та, ВГУ, 1971, вып. 1.
20. Динамическая теория биологических популяций. Под ред. Р. А. Полуэктова. «Наука», 1974.
21. *Дуб Дж. Л.* Вероятностные процессы. ИЛ, 1956.
22. *Дюге Д.* Теоретическая и прикладная статистика. «Наука», 1972.
23. *Емельянов С. В., Бурков В. Н.* Теория активных систем (обзор).— В сб.: «Согласованное управление». Изд. Ин-та проблем управления, 1972.
24. *Емельянов С. В., Бурков В. Н., Опойцев В. И.* Управление ак-

тивными системами.— Труды Всес. школы-семинара по управлению большими системами (Тбилиси, 1972). Тбилиси, «Мецниереба», 1973.
25. *Зангвилл У. И.* Нелинейное программирование.— «Сов. радио», 1973.
26. *Зубов В. И.* Устойчивость движения. «Высшая школа», 1973.
27. Итеративные методы в теории игр и программировании. Под ред. В. З. Беленького и В. А. Волконского. «Наука», 1974.
28. *Канторович Л. В.* Линейные полуупорядоченные пространства.— Матем. сб., 1937, № 2 (44).
29. *Карлин С.* Математические методы в теории игр, программировании и экономике. «Мир», 1964.
30. *Коллатц Л.* Функциональный анализ и вычислительная математика. «Мир», 1969.
31. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. «Наука», 1972.
32. *Красносельский М. А.* Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. Гостехиздат, 1956.
33. *Красносельский М. А.* Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. «Наука», 1966.
34. *Красносельский М. А.* Положительные решения операторных уравнений. Физматгиз, 1962.
35. *Красносельский М. А.* О нескольких новых принципах неподвижной точки.— Докл. АН СССР, 1973, т. 208, № 6.
36. *Красносельский М. А., Забрейко П. П.* Геометрические методы нелинейного анализа. «Наука», 1975.
37. *Красносельский М. А., Опойцев В. И.* Теорема о глобальном гомеоморфизме.— Зап. Харьк. матем. об-ва, 1976.
38. *Красносельский М. А., Стеценко В. Я.* К теории уравнений с вогнутыми операторами.— Сиб. матем. ж., 1969, т. 10, № 3.
39. *Красовский Н. Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. Физматгиз, 1959.
40. *Крейн М. Г., Рутман М. А.* Об операторах, оставляющих инвариантным конус в пространстве Банаха.— «Успехи матем. наук», 1948, т. 3, вып. 1.
41. *Левин А. Ю., Лифшиц Е. А.* К принципу обобщенного сжатия М. А. Красносельского.— Проблемы матем. анализа сложных систем, ВГУ, 1967, вып. 1.
42. *Лефевр В. А., Смолян Г. Л.* Алгебра конфликта. М., «Знание», 1968.
43. *Люстерник Л. А., Соболев В. И.* Элементы функционального анализа. «Наука», 1965.
44. *Макаров В. Л., Рубинов А. М.* Математическая теория экономической динамики и равновесия. «Наука», 1973.
45. *Маклейн С.* Гомология. «Мир», 1966.
46. *Малишевский А. В.* Модели совместного функционирования многих целенаправленных элементов.— «Автоматика и телемеханика», 1972, № 11 и 12.
47. *Малишевский А. В.* Натуральные системы.— «Автоматика и телемеханика», 1973, № 11.
48. *Мееров М. В., Литвак Б. Л.* Оптимизация систем многосвязного управления. «Наука», 1972.
49. *Месарович М., Мако Д., Такахара И.* Теория иерархических многоуровневых систем. «Мир», 1973.
50. *Милнор Д., Уоллес А.* Дифференциальная топология. Начальный курс. «Мир», 1972.
51. *Миранда К.* Уравнения с частными производными эллиптического типа. ИЛ, 1957.
52. *Миркин Б. Г.* Проблема группового выбора. «Наука», 1974.
53. *Моришима М.* Равновесие, устойчивость, рост. «Наука», 1972.
54. *Мышкис А. Д.* Обобщения теоремы о точке покоя динамической системы внутри замкнутой траектории.— Матем. сб. (Нов. серия), 1954, т. 34 (76), № 3.
55. *Мышкис А. Д., Бунт А. Я.* Об одном достаточном условии гомеоморфизма непрерывно дифференцируемого отображения.— «Успехи матем. наук», 1955, т. 10, вып. 1 (63).
56. *Никайдо Х.* Выпуклые структуры и математическая экономика. «Мир», 1972.

57. *Опойцев В. И.* Динамика коллективного поведения. I. Гомогенные системы.— «Автоматика и телемеханика», 1974, № 4.
58. *Опойцев В. И.* Динамика коллективного поведения. II. Системы с ограниченным межэлементным взаимодействием.—«Автоматика и телемеханика», 1974, № 6.
59. *Опойцев В. И.* Динамика коллективного поведения. III. Гетерогенные стистемы.— «Автоматика и телемеханика», 1975, № 1.
60. *Опойцев В. И.* Композиционно гетерогенные системы.— «Автоматика и телемеханика», 1975, № 7.
61. *Опойцев В. И.* Топологические методы в теории сложных систем.— «Автоматика и телемеханика», 1976, № 3.
62. *Опойцев В. И.* Гетерогенные и комбинированно вогнутые операторы.— Сиб. матем. ж., 1975, т. 16, № 4.
63. *Опойцев В. И.* Обобщение теории монотонных и вогнутых операторов.— Труды Моск. матем. об-ва, 1977, т. 36.
64. *Опойцев В. И.* Обращение принципа сжимающих отображений.— «Успехи матем. наук», 1976, т. 31, вып. 4.
65. *Опойцев В. И.* Вращение многозначных векторных полей и задачи статики.— «Автоматика и телемеханика», 1976, № 9.
66. *Оуэн Г.* Теория игр. «Мир», 1971.
67. *Понтрягин Л. С.* Основы комбинаторной топологии. Гостехиздат, 1957.
68. *Сансоне Д.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. ИЛ, 1953.
69. *Свирежев Ю. М., Елизаров Е. Я.* Математическое моделирование биологических систем.— «Проблемы космической биологии», т. 20. «Наука», 1972.
70. *Сибирский К. С.* Введение в топологическую динамику. Изд-во АН Молд. ССР, 1970.
71. *Спеньер Э.* Алгебраическая топология. «Мир», 1971.
72. *Стефанюк В. Л.* Взаимодействие при локальном управлении.— «Автоматика и телемеханика», 1973, № 6.
73. *Фет А. И.* Об условиях Фомина для взаимной однозначности непрерывно дифференцируемого отображения.— «Успехи матем. наук», 1950, т. 5, вып. 5 (39).
74. *Филиппов А. Ф.* Дифференцируемые уравнения с разрывной правой частью.— Матем. сб., 1960, 51, № 1.
75. *Фомин А. М.* Об одном достаточном условии гомеоморфизма непрерывно дифференцируемого отображения.— «Успехи матем. наук», 1949, т. 4, вып. 5 (33).
76. *Хилтон П. Дж., Уайли С.* Теория гомологий. «Мир», 1966.
77. *Ху Сы-цзян.* Теория гомотопий. «Мир», 1964.
78. *Цетлин М. Л.* Исследования по теории автоматов и моделированию биологических систем. «Наука», 1969.
79. *Цыпкин Я. З.* Адаптация и обучение в автоматических системах. «Наука», 1968.
80. *Шварц Дж.* Дифференциальная геометрия и топология. «Мир», 1970.
81. *Begle E. G.* A fixed point theorem.— Ann. Math., 1950, v. 51, N 3.
82. *Bessaga C.* On the converse of the Banach «fixed-point» principle.— Colloq. Math., 1959, v. 7, N 1.
83. *Bing R. H.* The elusive fixed point property.— Amer. Math. Monthly, 1969, v. 76, N 2.
84. *Debreu G.* A social equilibrium existence theorem.— Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1952, v. 38, N 10.
85. *Edelstein M.* An extention of Banach's contraction principle.— Proc. Amer. Math. Soc., 1961, v. 12, N 1.
86. *Eichhorn W., Oettli W.* A general formulation of the Lechatelier—Samuelson principle.— Econometrica, 1972, v. 40, N 4.
87. *Eilenberg S., Montgomery D.* Fixed point theorems for multivalued transformations.— Amer. J. Math., 1946, v. 68, N 2.
88. *Fadell E.* On a coincidence theorem of F. B. Fuller.— Pacif. J. Math., 1965, v. 15.
89. *Fuller F. B.* The homotopy theory of coincidences.— Ann. Math., 1954, v. 59, N 2.
90. *Gale D., Nikaido H.* The Jacobian matrix and global univalence of mappings.— Math. Ann., 1965, v. 159, N 2.

91. *Goldman A. J., Meyers Ph. R.* Simultaneous contractification.— J. Res. Nat. Bur. Stand., 1969, v. 73B, N 4.
92. *Hicks G. R.* Value and capital. Clarendon Press, 1946.
93. *Janos L.* A converse of Banach's contraction theorem.— Proc. Amer. Math. Soc., 1967, v. 18, N 2.
94. *Kakutani S.* A generalization of Brouwer's fixed point theorem.— Duke Math. J., 1941, v. 8, N 3.
95. *Marchaud A.* Sur les champs continus de demi-cones convexes et leurs integrales.— Compositio math., 1936, v. 3, fasc. 1.
96. *Meyers Ph. R.* A converse to Banach's contraction theorem.— J. Res. Nat. Bur. Stand., 1967, v. 71B, N 1—2.
97. *Meyers Ph. R.* Some extensions of Banach's contraction theorem.— J. Res. Nat. Bur. Stand., 1965, v. 69B, N 3.
98. *Meyers Ph. R.* Contractifiable semigroups.— J. Res. Nat. Bur. Stand., 1970, v. 74B, N 4.
99. *Michael E.* Continuous selections. I, II.— Ann. Math., 1956, v. 63, N 2; v. 64, N 3.
100. *Morishima M.* A generalization of the gross substitute system.— Rev. Econ. Stud., 1970, v. 37, N 2.
101. *Palais R. S.* Natural operations on differential forms.— Trans. Amer. Nath. Soc., 1959, v. 92, N 2.
102. *Samuelson P. A.* Foundations of economic analysis Cambridge, 1966.
103. *Warburton A., Ziemba W. T.* Convex inversion.— J. Math. Anal. a. Appl., 1971, v. 35, N 1.
104. *Wu F. F., Desoer Ch. A.* Global inverse function theorem.— IEEE Trans. Circuit Theory, 1972, v. 19, N 2.
105. *Zaremba S. Ch.* Sur les equations au paratingent.— Bull. sci. math., 2 ser., 1936, v. 60.

# ОГЛАВЛЕНИЕ

Валерий Иванович Опойцев

РАВНОВЕСИЕ И УСТОЙЧИВОСТЬ
В МОДЕЛЯХ КОЛЛЕКТИВНОГО ПОВЕДЕНИЯ

Утверждено к печати
ордена Ленина Институтом проблем управления

Редактор издательства А. И. Жилина
Художественный редактор Н. Н. Власик
Художник С. А. Миненков
Технический редактор Т. Д. Панасюк
Корректоры М. Б. Амусьева, В. А. Бобров

Сдано в набор 2/IX 1976 г.
Подписано к печати 3/XII-1976 г. Формат 60×90$^1/_{16}$.
Бумага № 1. Усл. печ. л. 15,5. Уч.-изд. л. 14,7.
Тираж 2700 экз. Т-21319. Тип. зак. 4277.
Цена 1 р. 10 к.

Издательство «Наука»,
103717 ГСП, Москва, К-62, Подсосенский пер., 21

2-я типография издательства «Наука»,
121099, Москва, Г-99, Шубинский пер., 10